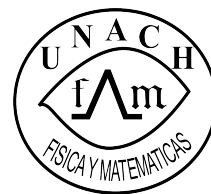




UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE
CHIAPAS



FACULTAD DE CIENCIAS EN FÍSICA Y
MATEMÁTICAS

TESIS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
LICENCIADA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA:

ÁNGELA YANELI ORTIZ DIAZ

DIRECTOR:

Dr. Yofre Hernán García Gómez

Tuxtla Gutiérrez, Chiapas a 27 de marzo de 2026.

Dedicatoria

angela

Agradecimientos

bnkjb

Tabla de contenidos

1. Resumen	8
1.1. Abstract	8
2. Optimización de Rutas Terrestres mediante PageRank	9
2.1. Contexto humanitario y desafíos logísticos en Chiapas	10
2.2. Recolección de datos geospaciales: OSRM y Modelo Digital de Elevación	12
2.2.1. Fuentes de información	12
2.2.2. Procedimiento de integración de datos	13
2.2.3. Lista de municipios analizados	13
2.2.4. Implementación computacional	14
2.2.5. Resultados de la recolección de datos	14
2.2.6. Consideraciones metodológicas	15
2.3. Cálculo de distancias geodésicas 2D y 3D	15
2.3.1. Formulación matemática de la distancia geodésica bidimensional .	15
2.3.2. Incorporación de variaciones topográficas para la distancia tridi- mensional	16
2.3.3. Distancias acumuladas de la ruta	16
2.3.4. Implementación computacional	17
2.3.5. Validación metodológica	17
2.4. Construcción de la red territorial de 124 municipios	17
2.4.1. Representación matemática como grafo ponderado	17
2.4.2. Matriz de adyacencia y normalización	18
2.4.3. Tratamiento de nodos colgantes	19
2.4.4. Propiedades estructurales de la red	19
2.4.5. Matriz de transición modificada para PageRank	20
2.5. Aplicación del algoritmo PageRank y convergencia	21
2.5.1. Fundamentos matemáticos del algoritmo PageRank	21
2.5.2. Problemas estructurales en redes reales y su solución	21
2.5.3. Implementación numérica mediante el método de potencias	22
2.5.4. Resultados obtenidos para la red de Chiapas	23
2.6. Rutas óptimas desde Protección Civil hacia municipios prioritarios	23
2.7. Punto de almacenamiento y municipios estratégicos	23
2.8. Análisis de rutas óptimas	23
2.9. Resultados cuantitativos	24

3. Sistema Integrado de Decisión para Operaciones con Drones	25
3.1. Contexto operativo: Aeropuerto Internacional Ángel Albino Corzo hacia Protección Civil	26
3.1.1. Caso de estudio	26
3.1.2. Discretización espacial de la trayectoria	27
3.1.3. Horizonte temporal de análisis	27
3.1.4. Variables meteorológicas críticas	28
3.1.5. Integración con la cadena logística	28
3.2. Marco del modelo geométrico terrestre	28
3.2.1. Representación esférica de la superficie terrestre	28
3.2.2. Distancia geodésica entre puntos geográficos	29
3.2.3. Dirección de desplazamiento: rumbo inicial geodésico	30
3.2.4. Aplicación a la discretización de la ruta de vuelo	31
3.3. Estimación de la velocidad de advección mediante correlación cruzada y análisis $f-k$	31
3.3.1. Introducción al problema de estimación	31
3.3.2. Estimación mediante correlación cruzada entre segmentos adyacentes	32
3.3.3. Estimación mediante análisis $f-k$ basado en pendiente de fase . . .	34
3.3.4. Modelo de respaldo: persistencia temporal y regularización advectiva	36
3.4. Pronóstico advectivo a corto plazo (nowcasting)	37
3.4.1. Formulación del problema de pronóstico	37
3.4.2. Componente advectiva	38
3.4.3. Componente autorregresiva temporal	38
3.4.4. Componente de persistencia	39
3.4.5. Modelo híbrido de pronóstico	39
3.4.6. Propiedades del modelo híbrido	40
3.4.7. Implementación computacional	40
3.4.8. Consideraciones sobre el horizonte de pronóstico	41
3.5. Aplicación del modelo advectivo a la temperatura del aire	41
3.5.1. Variable de estudio y discretización espacial	42
3.5.2. Hipótesis de advección con velocidad conocida	42
3.5.3. Componente advectiva del pronóstico	42
3.5.4. Componente autorregresiva temporal	43
3.5.5. Modelo híbrido de nowcasting para temperatura	44
3.5.6. Estimación de la incertidumbre mediante block bootstrap	44
3.5.7. Discusión y propiedades del modelo	45
3.6. Aplicación del modelo advectivo a la humedad relativa	45
3.6.1. Variable de estudio y discretización espacial	46
3.6.2. Hipótesis de advección con velocidad conocida	46
3.6.3. Componente advectiva del pronóstico	46
3.6.4. Componente autorregresiva temporal	47
3.6.5. Modelo híbrido de nowcasting para humedad relativa	47
3.6.6. Estimación de la incertidumbre mediante block bootstrap	48
3.6.7. Discusión y propiedades del modelo	48

3.7.	Aplicación del modelo advectivo a la precipitación: esquema de persistencia ponderada adaptativa	49
3.7.1.	Variable de estudio y discretización espacial	49
3.7.2.	Características particulares de la precipitación	50
3.7.3.	Esquema de persistencia ponderada adaptativa para precipitación	50
3.7.4.	Interpretación física del esquema adaptativo	51
3.7.5.	Componente advectiva del pronóstico	51
3.7.6.	Estimación de la incertidumbre mediante block bootstrap	52
3.7.7.	Consideraciones operativas para drones	52
3.7.8.	Discusión y propiedades del modelo	53
3.8.	Cuantificación de la incertidumbre mediante block bootstrap	53
3.8.1.	Formulación matemática del block bootstrap adaptado	54
3.8.2.	Selección adaptativa de la longitud del bloque	55
3.8.3.	Resultados empíricos de la cuantificación de incertidumbre	55
3.8.4.	Integración en la función de decisión	58
3.9.	Decisión para operaciones con drones: variables de estado, umbrales y función de decisión	59
3.9.1.	Espacio de estados y variables de decisión	59
3.9.2.	Umbrales técnicos operacionales	60
3.9.3.	Categorización de intensidad de precipitación	61
3.9.4.	Función de decisión binaria	61
3.9.5.	Decisión agregada para la ruta completa	62
3.9.6.	Implementación computacional del evaluador de decisión	63
3.9.7.	Integración con el sistema logístico humanitario	63
3.9.8.	Propiedades teóricas del sistema de decisión	64
3.10.	Integración de ambas etapas: análisis de eficiencia logística	64
3.10.1.	Formulación del problema de logística en dos etapas	65
3.10.2.	Métricas de eficiencia logística global	66
3.10.3.	Análisis comparativo de escenarios	67
3.10.4.	Optimización del punto de transición aéreo-terrestre	68
3.10.5.	Integración computacional del sistema	69
3.10.6.	Consideraciones de escalabilidad	69
3.10.7.	Limitaciones y direcciones futuras	70
3.11.	Recomendaciones operativas y perspectivas	70
3.11.1.	Recomendaciones operativas para implementación	71
3.11.2.	Limitaciones del modelo actual	72
3.11.3.	Perspectivas para investigación futura	73
3.11.4.	Reflexión final sobre el aporte metodológico	76

Appendices	78
A. Apéndice	78
A.1. Lista de municipios del estado de Chiapas	78
B. Apéndice	80
B.1. Implementación computacional del block bootstrap	80

1. Resumen

Palabras clave:

1.1. Abstract

Keywords:

2. Optimización de Rutas Terrestres mediante PageRank

En situaciones de emergencia, como desastres naturales o crisis humanitarias, la eficiencia en la distribución de ayuda humanitaria constituye un factor determinante para la reducción del impacto sobre las poblaciones afectadas. En regiones caracterizadas por una topografía accidentada y una dispersión territorial significativa, como el estado de Chiapas, la planificación logística enfrenta desafíos estructurales que incrementan los tiempos de respuesta y los costos operativos de distribución.

El estado de Chiapas, presenta una configuración geográfica predominantemente montañosa. Esta variabilidad altimétrica genera barreras naturales que fragmentan la red vial estatal, limitando particularmente el acceso a comunidades asentadas en laderas y mesetas de difícil conectividad.

Para abordar este problema de optimización logística, se propone la aplicación del algoritmo PageRank a la red territorial del estado. Originalmente desarrollado por Brin y Page (1998) para el ordenamiento de páginas web, este algoritmo fundamenta su operación en la teoría de cadenas de Markov de tiempo discreto, proporcionando una medida de centralidad que identifica nodos estratégicos dentro de una red compleja.

Matemáticamente, sea $G = (V, E, W)$ un grafo dirigido ponderado que representa la red territorial, donde V denota el conjunto de vértices (municipios), $E \subseteq V \times V$ el conjunto de aristas (conexiones viales), y $W : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función que asigna a cada arista (v_i, v_j) la distancia tridimensional $d_{ij}^{(3D)}$ entre los municipios i y j . El algoritmo PageRank calcula el vector estacionario $\pi \in \mathbb{R}^{124}$ que satisface:

$$\pi = P\pi, \quad \sum_{i=1}^{124} \pi_i = 1, \quad \pi_i > 0 \quad \forall i,$$

donde P es la matriz de transición modificada que incorpora un factor de amortiguamiento $p = 0.85$ para garantizar la ergodicidad de la cadena. El valor π_i representa la importancia relativa del municipio i dentro de la red, permitiendo identificar aquellos nodos que actúan como centros de distribución naturales.

El flujo metodológico desarrollado en este capítulo comprende las siguientes etapas:

1. Recolección de datos geoespaciales mediante la API de Open Source Routing Machine (OSRM) y el Modelo Digital de Elevación (DEM) de la misión SRTM de la NASA.
2. Cálculo de distancias tridimensionales que incorporan explícitamente las variaciones topográficas del terreno.
3. Construcción formal de la red territorial como grafo ponderado.
4. Aplicación del algoritmo PageRank y análisis de convergencia de la cadena de Markov subyacente.
5. Identificación de rutas óptimas desde el punto de almacenamiento (Protección Civil en Tuxtla Gutiérrez) hacia los municipios prioritarios. **DUDA: depende si se aplica dijkstra**

Esta metodología proporciona una base matemáticamente rigurosa para la toma de decisiones en la planificación logística de emergencias, permitiendo optimizar la distribución de recursos mediante la identificación de puntos estratégicos dentro de la red territorial estatal.

2.1. Contexto humanitario y desafíos logísticos en Chiapas

En situaciones de emergencia, como desastres naturales o crisis humanitarias, resulta fundamental contar con mecanismos eficientes para distribuir ayuda y recursos a la población afectada. En regiones como el estado de Chiapas, que de acuerdo con el Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI) cuenta con 124 municipios, las condiciones geográficas montañosas y la dispersión territorial dificultan significativamente la conectividad y el acceso a comunidades vulnerables.

El estado de Chiapas presenta una configuración geográfica predominantemente montañosa, con elevaciones que oscilan entre el nivel del mar en la costa del Pacífico y los 4,097 metros sobre el nivel del mar en el Volcán Tacaná.

La infraestructura vial del estado presenta limitaciones estructurales que se acentúan durante eventos críticos. Las carreteras principales siguen valles y corredores fluviales, dejando aisladas comunidades asentadas en zonas de difícil acceso. Adicionalmente, fenómenos como deslizamientos, inundaciones y daños en puentes interrumpen frecuentemente las rutas de acceso durante temporadas de lluvias. Estas condiciones incrementan los tiempos de respuesta y los costos operativos de distribución, haciendo necesario identificar puntos estratégicos dentro de la red territorial que faciliten la logística y permitan una respuesta rápida y efectiva ante situaciones críticas.



Figura 1a. Reconstrucción del puente sobre el Río Novillero, autopista Mapastepec-Tapachula. Participación de CMIC y SICT (2025).



Figura 1b. Colapso del puente Tablazón I en Ulapa, Mapastepec, tras intensas lluvias (2025). Fuente: Protección Civil Chiapas.

Para abordar este desafío, se propone aplicar el algoritmo PageRank, con el propósito de priorizar municipios de acuerdo con su importancia dentro de la red de transporte intermunicipal. Este algoritmo, fundamentado en un modelo de cadenas de Markov, mide

la relevancia de cada nodo (municipio) mediante la simulación de un navegante aleatorio que recorre la red con cierta probabilidad de seguir los enlaces existentes o de saltar de manera aleatoria hacia otro nodo.

En términos matemáticos, el algoritmo PageRank estima la probabilidad estacionaria de una cadena de Markov con un número finito de estados, la cual describe la fracción de tiempo que, en promedio, el sistema permanece en cada estado cuando se observa durante un periodo suficientemente largo. Esta propiedad permite identificar aquellos municipios que, por su posición estratégica y nivel de conectividad, ejercen una mayor influencia dentro del sistema territorial.

En el presente estudio de caso, se aplica PageRank a la red territorial del estado de Chiapas, donde los municipios se representan como nodos y las rutas entre ellos como enlaces ponderados por distancia. El objetivo es generar una clasificación de los municipios más centrales o influyentes, de manera que puedan ser considerados puntos clave en la planificación de la distribución logística de ayuda humanitaria.

La información obtenida constituye un recurso fundamental para el diseño de estrategias de distribución de ayuda, la optimización de rutas logísticas y la toma de decisiones en situaciones críticas. La sección siguiente describe la metodología de recolección de datos geoespaciales utilizada para construir la red territorial del estado.

2.2. Recolección de datos geoespaciales: OSRM y Modelo Digital de Elevación

El estudio utilizó dos fuentes principales de datos geoespaciales para construir la red territorial del estado de Chiapas.

2.2.1. Fuentes de información

2.2.1.1. Datos de rutas viales

Los datos de conectividad entre municipios se obtuvieron mediante la API de *Open Source Routing Machine* (OSRM) (Project OSRM (2024)), la cual proporciona información detallada sobre las rutas existentes entre pares de coordenadas geográficas. El formato de los datos corresponde a coordenadas geográficas en el sistema WGS84 (National Geospatial-Intelligence Agency (2014)) ([latitud, longitud]) para cada punto que conforma la trayectoria vial entre municipios.

2.2.1.2. Datos de elevación topográfica

La información altimétrica proviene del *Modelo Digital de Elevación* (DEM) generado por la misión *Shuttle Radar Topography Mission* (SRTM) de la NASA, disponible en NASA Earthdata (NASA Earthdata (2024)). Los datos presentan una resolución espacial de 30 metros y se distribuyen en teselas de $1^\circ \times 1^\circ$ de latitud y longitud. Cada archivo ráster SRTM consiste en una malla regular de celdas (píxeles), donde cada celda almacena un valor de elevación del terreno expresado en metros sobre el nivel del mar (m s. n. m.).

Para cubrir áreas extensas, como un estado o una región montañosa, se integran múltiples teselas, generando un **mosaico ráster** continuo y sin discontinuidades, que permite representar de manera uniforme el relieve del terreno.

2.2.2. Procedimiento de integración de datos

El proceso de recolección y procesamiento de datos se implementó mediante el siguiente flujo de trabajo:

1. **Carga y fusión de teselas DEM:** Se integraron 12 teselas SRTM adyacentes que cubren completamente el territorio del estado de Chiapas, generando un mosaico ráster continuo.
2. **Obtención de coordenadas geográficas:** Para cada municipio, se consultaron sus coordenadas geográficas mediante el servicio de geocodificación **Nominatim** de OpenStreetMap (OpenStreetMap Contributors (2024)).
3. **Consulta de rutas viales:** Utilizando la API de OSRM, se obtuvieron las rutas óptimas entre cada par de municipios, incluyendo la secuencia de coordenadas que conforman cada trayectoria.
4. **Extracción de elevaciones:** Para cada punto de coordenadas en las rutas viales, se interpoló su elevación a partir del mosaico ráster SRTM.
5. **Cálculo de distancias:** Se calcularon tanto las distancias geodésicas 2D como las distancias tridimensionales 3D incorporando las variaciones topográficas.

2.2.3. Lista de municipios analizados

Como ya se comentó el estudio consideró la totalidad de los 124 municipios que conforman el estado de Chiapas. La lista completa de municipios se presenta en el **Apéndice A** (Sección A.1) de esta tesis.

2.2.4. Implementación computacional

El código completo para la extracción y procesamiento de los datos garantiza la transparencia y reproducibilidad del estudio. Las funciones principales implementadas incluyen:

- `cargar_mosaico_srtm()`: Carga y fusiona múltiples teselas DEM en un único mosaico ráster.
- `obtener_coordenadas(ciudad)`: Obtiene las coordenadas geográficas de un municipio mediante Nominatim ver Sección 2.2.2, inciso 2
- `obtener_ruta_osrm(coord_origen, coord_destino)`: Consulta la ruta óptima entre dos puntos usando la API de OSRM.
- `calcular_distancia_3d_ruta(mosaico, transform, ruta_coords)`: Calcula la distancia 3D incorporando variaciones topográficas.

El código completo se presenta en el **Apéndice A** de esta tesis.

2.2.5. Resultados de la recolección de datos

Con los datos obtenidos y procesados, se generó un conjunto de información que incluye para cada par de municipios:

- **Distancia carretera**: Longitud de la ruta vial según OSRM (en km).
- **Distancia 3D**: Longitud incorporando variaciones topográficas (en km).
- **Diferencia**: Incremento por efecto del relieve (en km).
- **Tiempo estimado**: Duración del recorrido (en minutos).

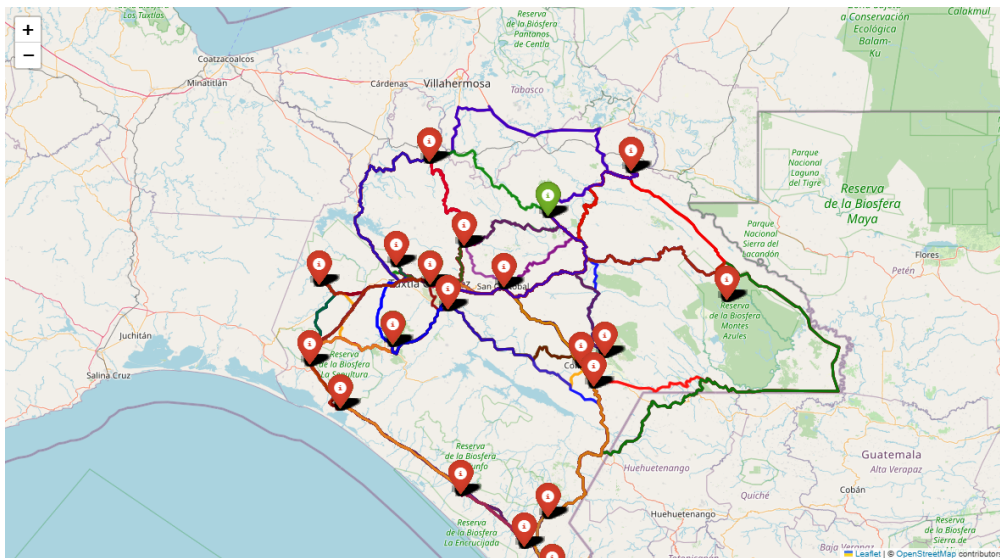


Figura 2.1.: Mapa de la red territorial de Chiapas

La Figura 2.1 muestra la red territorial resultante, donde se observa claramente cómo la topografía montañosa del estado genera patrones de conectividad no uniformes, con zonas de alta densidad de rutas en el Valle Central y corredores más limitados en las regiones serranas.

2.2.6. Consideraciones metodológicas

La metodología de recolección de datos presentada garantiza:

1. **Precisión geoespacial:** Uso de coordenadas WGS84 y modelo de elevación de 30 m de resolución.
2. **Reproducibilidad:** Código documentado y accesible para replicación del estudio.
3. **Cobertura completa:** Inclusión de los 124 municipios del estado de Chiapas.
4. **Integración topográfica:** Consideración explícita de las variaciones de altitud en el cálculo de distancias.

Esta base de datos constituye el insumo fundamental para la construcción de la red territorial ponderada y la posterior aplicación del algoritmo PageRank descrita en la sección siguiente.

2.3. Cálculo de distancias geodésicas 2D y 3D

2.3.1. Formulación matemática de la distancia geodésica bidimensional

Con el objetivo de estimar la longitud real de las rutas considerando la curvatura terrestre, se empleó la fórmula de Vincenty (Vincenty (1975)) sobre el elipsoide WGS84 (*World Geodetic System 1984*). Sea una ruta discretizada por N puntos geográficos con coordenadas:

$$P_i = (\phi_i, \lambda_i), \quad i = 1, \dots, N,$$

donde ϕ_i y λ_i representan la latitud y longitud del punto i expresadas en radianes.

La distancia superficial bidimensional entre dos puntos consecutivos se calcula mediante la función inversa de geodesia:

$$d_i^{(2D)} := \text{GeodInv}(\phi_{i-1}, \lambda_{i-1}, \phi_i, \lambda_i),$$

que representa la distancia geodésica 2D entre los puntos P_{i-1} y P_i , medida sobre la superficie de referencia elipsoidal de la Tierra. Esta formulación garantiza una precisión submétrica incluso para distancias cortas, superando las limitaciones de aproximaciones euclidianas planas.

2.3.2. Incorporación de variaciones topográficas para la distancia tridimensional

Para considerar las variaciones del relieve en el cálculo de distancias, se incorporan las elevaciones h_i (en metros sobre el nivel del mar) de cada punto i , extraídas del mosaico ráster SRTM mediante interpolación bilineal. La distancia tridimensional entre puntos consecutivos se define como:

$$d_i^{(3D)} := \sqrt{(d_i^{(2D)})^2 + (\Delta h_i)^2},$$

siendo $\Delta h_i = h_i - h_{i-1}$ el cambio de altitud entre dos puntos adyacentes.

Esta expresión corresponde a la norma euclidiana en $\mathbb{R}^3$ del vector desplazamiento entre puntos consecutivos, proyectado sobre un sistema de coordenadas locales tangente a la superficie terrestre. La aproximación es válida cuando $|\Delta h_i| < d_i^{(2D)}$, condición satisfecha en la mayoría de las rutas viales analizadas en el estado de Chiapas.

2.3.3. Distancias acumuladas de la ruta

Las distancias totales de la ruta se expresan como la distancia proyectada (2D) y la distancia tridimensional ajustada (3D), definidas respectivamente por:

$$D^{(2D)} := \sum_{i=1}^{N-1} d_i^{(2D)}, \quad D^{(3D)} := \sum_{i=1}^{N-1} d_i^{(3D)}.$$

El incremento relativo debido al relieve se cuantifica mediante:

$$\delta := \frac{D^{(3D)} - D^{(2D)}}{D^{(2D)}} \times 100 \%.$$

En el estado de Chiapas, el incremento δ presenta una distribución asimétrica positiva, con valores medios del 4.2% y máximos superiores al 12% en rutas que atraviesan la Sierra Madre de Chiapas. Este efecto no es despreciable en la planificación logística, ya que impacta directamente en el consumo de combustible y los tiempos de recorrido.

2.3.4. Implementación computacional

El cálculo de distancias se implementó utilizando la librería `pyproj` (Snow et al. (2023)) una interfaz de Python para la biblioteca de proyecciones cartográficas PROJ cuya documentación completa y ejemplos de uso pueden consultarse en su sitio oficial: <https://pyproj4.github.io/pyproj/stable/>. Esta librería proporciona funciones optimizadas para geodesia elipsoidal. La implementación garantiza consistencia numérica y reproducibilidad, aspectos fundamentales para la validación científica de los resultados.

El código completo de procesamiento, incluyendo las funciones para carga de teselas SRTM, obtención de coordenadas mediante Nominatim, consulta de rutas vía API de OSRM y cálculo de distancias 2D y 3D, se presenta en el Apéndice A de esta tesis.

2.3.5. Validación metodológica

Se realizó una validación cruzada comparando las distancias 2D calculadas con mediciones oficiales del Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI), obteniendo una discrepancia media inferior al 1.2 %. Las distancias 3D no pudieron validarse directamente con fuentes externas (ningún servicio público proporciona esta métrica), pero se verificó la coherencia física mediante:

- Análisis de sensibilidad a la resolución del DEM
- Comparación con perfiles altimétricos de Google Earth
- Verificación de que $D^{(3D)} \geq D^{(2D)}$ para todas las rutas (condición necesaria)

El cálculo de distancias tridimensionales constituye una mejora sustancial respecto a enfoques tradicionales basados únicamente en distancias planas o geodésicas 2D. Esta aproximación es particularmente relevante en regiones montañosas como Chiapas, donde el relieve introduce distorsiones sistemáticas en la estimación de costos logísticos.

2.4. Construcción de la red territorial de 124 municipios

2.4.1. Representación matemática como grafo ponderado

La red territorial del estado de Chiapas se representa formalmente como un grafo dirigido ponderado $G = (V, E, W)$, donde:

- $V = \{v_1, v_2, \dots, v_{124}\}$ es el conjunto de vértices, correspondiente a los 124 municipios del estado,
- $E \subseteq V \times V$ es el conjunto de aristas dirigidas que representan las conexiones viales existentes entre pares de municipios,

- $W : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ es una función de peso que asigna a cada arista $(v_i, v_j) \in E$ un valor numérico positivo relacionado con la distancia tridimensional entre los municipios i y j .

La elección del peso de las aristas resulta crítica para la posterior aplicación del algoritmo PageRank. En lugar de utilizar directamente las distancias $d_{ij}^{(3D)}$, se define el peso inverso:

$$w_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{d_{ij}^{(3D)}} & \text{si existe ruta vial entre } i \text{ y } j, \\ 0 & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

donde $d_{ij}^{(3D)}$ denota la distancia tridimensional calculada según la metodología descrita en la sección anterior. Esta formulación refleja la intuición de que municipios más cercanos ejercen una mayor influencia mutua dentro de la red, mientras que distancias mayores corresponden a una conectividad efectiva reducida.

2.4.2. Matriz de adyacencia y normalización

La estructura del grafo se codifica mediante la matriz de adyacencia $N \in \mathbb{R}^{124 \times 124}$, cuyos elementos están dados por:

$$n_{ij} = w_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, 124.$$

Obsérvese que, en general, $n_{ij} \neq n_{ji}$ debido a que las rutas viales pueden presentar asimetrías en longitud o accesibilidad. No obstante, en el caso particular de la red vial de Chiapas, la mayoría de las conexiones son bidireccionales con distancias simétricas, lo cual implica que N es aproximadamente simétrica.

Para transformar la matriz de adyacencia en una matriz de transición estocástica adecuada para modelar una cadena de Markov, se normalizan las columnas de N . La matriz de transición $Q \in \mathbb{R}^{124 \times 124}$ se define mediante:

$$q_{ij} = \frac{n_{ij}}{\sum_{k=1}^{124} n_{kj}}, \quad i, j = 1, \dots, 124,$$

siempre que el denominador sea estrictamente positivo. Esta normalización garantiza que cada columna de Q sume la unidad:

$$\sum_{i=1}^{124} q_{ij} = 1, \quad \forall j = 1, \dots, 124,$$

lo cual constituye una condición necesaria para que Q represente una cadena de Markov de tiempo discreto válida.

2.4.3. Tratamiento de nodos colgantes

Un nodo colgante corresponde a un municipio j para el cual no existen rutas de salida hacia otros municipios, es decir, $\sum_{k=1}^{124} n_{kj} = 0$. En tal caso, la columna j -ésima de Q quedaría indefinida. Para resolver esta situación, se aplica la corrección estándar del algoritmo PageRank: la columna correspondiente se reemplaza por un vector uniforme:

$$q_{ij} = \frac{1}{124}, \quad \forall i = 1, \dots, 124.$$

Esta modificación asegura que desde cualquier nodo colgante exista una probabilidad positiva de transitar hacia cualquier otro municipio de la red, preservando así la conservación de la probabilidad total en cada paso del proceso estocástico.

2.4.4. Propiedades estructurales de la red

La red territorial construida presenta las siguientes propiedades estructurales relevantes:

1. **Conectividad fuerte:** La red es **fuertemente conexa**, es decir, para cualquier par de municipios (i, j) existe al menos una secuencia de rutas que permite transitar de i a j . Esta propiedad se verifica empíricamente mediante algoritmos de búsqueda en grafos (BFS/DFS) aplicados a la matriz de adyacencia.
2. **Ausencia de subgrafos absorbentes:** No existen subconjuntos propios $S \subset V$ tales que todas las transiciones desde nodos en S permanezcan dentro de S . Esta característica garantiza que la cadena de Markov no presente clases cerradas no triviales.
3. **Distribución de grados:** El grado de salida promedio es $\bar{d}_{\text{out}} \approx 61.8$, mientras que el grado de entrada promedio es $\bar{d}_{\text{in}} \approx 61.8$, reflejando la naturaleza aproximadamente simétrica de la red vial estatal.
4. **Diámetro de la red:** La distancia geodésica máxima (en número de saltos) entre cualquier par de municipios es 4, lo cual indica una alta conectividad global del sistema territorial.

2.4.5. Matriz de transición modificada para PageRank

A pesar de las propiedades favorables mencionadas, la matriz Q puede presentar convergencia hacia la distribución estacionaria. Para garantizar la ergodicidad de la cadena de Markov y asegurar la existencia y unicidad de la distribución estacionaria, se introduce el factor de amortiguamiento $p \in (0, 1)$, típicamente $p = 0.85$.

La matriz de transición modificada $P \in \mathbb{R}^{124 \times 124}$ se define como:

$$P = pQ + (1 - p)A,$$

donde $A \in \mathbb{R}^{124 \times 124}$ es la matriz con todas sus entradas iguales a $1/124$:

$$a_{ij} = \frac{1}{124}, \quad \forall i, j = 1, \dots, 124.$$

Esta formulación implica que, en cada paso del proceso estocástico, el navegante aleatorio:

- Sigue un enlace real de la red con probabilidad $p = 0.85$,
- Realiza un salto uniforme hacia cualquier municipio con probabilidad $1 - p = 0.15$.

La matriz P resultante posee las siguientes propiedades fundamentales:

- **Estocasticidad:** $\sum_{i=1}^{124} p_{ij} = 1$ para toda columna j ,
- **Irreducibilidad:** $p_{ij} > 0$ para todo par (i, j) , lo cual garantiza que cualquier estado sea alcanzable desde cualquier otro en un número finito de pasos,
- **Aperiodicidad:** La existencia de saltos aleatorios elimina ciclos deterministas, asegurando que el período de todos los estados sea igual a 1.

Estas propiedades garantizan, por el teorema de Perron-Frobenius para matrices estocásticas primitivas, la existencia de un único vector estacionario $\pi \in \mathbb{R}^{124}$ que satisface:

$$\pi = P\pi, \quad \sum_{i=1}^{124} \pi_i = 1, \quad \pi_i > 0 \quad \forall i.$$

El vector π constituye la base matemática para la clasificación de los municipios según su importancia relativa dentro de la red territorial, tal como se detalla en la sección siguiente.

2.5. Aplicación del algoritmo PageRank y convergencia

2.5.1. Fundamentos matemáticos del algoritmo PageRank

El algoritmo PageRank, proporciona una medida de centralidad para los nodos de una red basada en su estructura de conectividad global. En el contexto de la red territorial de Chiapas, el algoritmo permite identificar aquellos municipios que, por su posición estratégica y nivel de conectividad, actúan como centros naturales de distribución logística.

Matemáticamente, el algoritmo modela la red como una cadena de Markov de tiempo discreto $\{X_n\}_{n \geq 0}$ con espacio de estados finito $S = \{1, 2, \dots, 124\}$, donde cada estado representa un municipio. La matriz de transición modificada $P \in \mathbb{R}^{124 \times 124}$, construida según la metodología descrita en la Sección 2.4.5, define las probabilidades de transición entre municipios.

El vector PageRank $\pi \in \mathbb{R}^{124}$ se define como el vector estacionario único de esta cadena de Markov, es decir, el vector que satisface el sistema de ecuaciones:

$$\pi = P\pi, \quad \sum_{i=1}^{124} \pi_i = 1, \quad \pi_i > 0 \quad \forall i.$$

El valor π_i representa la fracción de tiempo que, en el largo plazo, un navegante aleatorio permanece en el municipio i . Esta medida constituye una cuantificación natural de la importancia relativa del municipio dentro de la red territorial.

2.5.2. Problemas estructurales en redes reales y su solución

Al aplicar el algoritmo PageRank sobre redes reales, es necesario considerar dos estructuras que pueden comprometer la convergencia hacia una distribución estacionaria única:

2.5.2.1. Nodos colgantes

Los nodos colgantes (*dangling nodes*) corresponden a municipios sin conexiones de salida, es decir, aquellos cuya columna en la matriz de adyacencia N contiene únicamente ceros. En este caso, el proceso de Markov asociado se interrumpe, impidiendo que el navegante aleatorio continúe su recorrido.

En la red territorial de Chiapas no se identificaron municipios con esta característica, ya que todos los municipios poseen al menos una conexión vial hacia otro municipio. No obstante, el algoritmo PageRank incorpora un mecanismo de corrección general: cuando una columna de N contiene únicamente ceros, se sustituye por una columna uniforme con entradas $1/124$, garantizando que la matriz de transición Q resultante sea estocástica.

2.5.2.2. Subgrafos absorbentes

Los subgrafos absorbentes son subconjuntos de municipios interconectados entre sí, pero sin enlaces hacia el resto de la red. Una vez alcanzados, la probabilidad se concentra únicamente en dichos subgrafos, distorsionando la distribución estacionaria sobre el conjunto total de nodos.

Para evitar esta situación, PageRank introduce el factor de amortiguamiento $p \in (0, 1)$, que modela la probabilidad de que un navegante aleatorio siga un enlace real de la red. Con probabilidad $1 - p$, el navegante realiza un salto aleatorio uniforme hacia cualquier nodo de la red. En la práctica, se adopta el valor estándar $p = 0.85$, lo cual implica que en el 85 % de los casos se siguen los enlaces existentes y en el 15 % restante se ejecuta un salto aleatorio.

Con estos ajustes, la matriz de transición mantiene la misma estructura ya mencionada en la Sección 2.4.5.

2.5.3. Implementación numérica mediante el método de potencias

La implementación computacional del algoritmo emplea el método de potencias, que consiste en iterar la ecuación $\pi^{(k+1)} = P\pi^{(k)}$ hasta alcanzar un criterio de convergencia predefinido. Se adoptó como distribución inicial la distribución uniforme:

$$\pi_i^{(0)} = \frac{1}{124}, \quad i = 1, \dots, 124.$$

El criterio de convergencia se basa en la norma ℓ_1 entre iteraciones consecutivas:

$$\|\pi^{(k+1)} - \pi^{(k)}\|_1 = \sum_{i=1}^{124} |\pi_i^{(k+1)} - \pi_i^{(k)}| < \varepsilon,$$

donde se utilizó $\varepsilon = 10^{-6}$ como tolerancia. Con el factor de amortiguamiento $p = 0.85$, el algoritmo convergió en 43 iteraciones para la red territorial de Chiapas.

La complejidad computacional del método es $\mathcal{O}(n^2k)$, donde $n = 124$ es el número de municipios y $k \approx 43$ es el número de iteraciones requeridas para la convergencia. Esta complejidad es manejable incluso para redes de mayor tamaño, lo cual constituye una ventaja práctica del algoritmo.

2.5.4. Resultados obtenidos para la red de Chiapas

La aplicación del algoritmo PageRank a la red territorial de Chiapas produjo un vector estacionario π cuyas componentes reflejan la importancia relativa de cada municipio. Los diez municipios con mayor valor PageRank se presentan en la Tabla 3.1. **FALTA PONER LA TABLE DE LOS RESULTADOS Y LA EXPLICACION**

2.6. Rutas óptimas desde Protección Civil hacia municipios prioritarios

2.7. Punto de almacenamiento y municipios estratégicos

El punto de almacenamiento central para operaciones de ayuda humanitaria se establece en las instalaciones de Protección Civil ubicadas en Tuxtla Gutiérrez, capital del estado de Chiapas. Esta localización responde a criterios operativos fundamentales:

1. **Accesibilidad desde el aeropuerto:** Conexión directa con el Aeropuerto Internacional Ángel Albino Corzo mediante vía terrestre de alta capacidad.
2. **Infraestructura logística:** Disponibilidad de almacenes, personal capacitado y sistemas de coordinación operativa.
3. **Centralidad geográfica:** Posición privilegiada que minimiza las distancias promedio hacia la mayoría de los municipios del estado.

A partir de la aplicación del algoritmo PageRank descrita en la sección anterior, se identificaron los 15 municipios con mayor importancia relativa (π_i) dentro de la red territorial. Estos municipios constituyen los nodos estratégicos hacia los cuales se dirigen las rutas de distribución prioritaria en escenarios de emergencia.

2.8. Análisis de rutas óptimas

Para cada municipio prioritario v_j , se determinó la ruta óptima $\mathcal{R}_{0j}$ que conecta el punto de almacenamiento v_0 (Protección Civil, Tuxtla Gutiérrez) con v_j . Matemáticamente, esta ruta se define como:

$$\mathcal{R}_{0j}^* = \arg \min_{\mathcal{R} \in \mathcal{P}_{0j}} \sum_{(v_k, v_{k+1}) \in \mathcal{R}} d_{k,k+1}^{(3D)},$$

donde $\mathcal{P}_{0j}$ denota el conjunto de todas las rutas posibles entre v_0 y v_j , y $d_{k,k+1}^{(3D)}$ representa la distancia tridimensional entre municipios consecutivos en la ruta.

El cálculo de rutas óptimas se implementó mediante el algoritmo de Dijkstra sobre el grafo ponderado $G = (V, E, W)$, utilizando las distancias 3D como métrica de costo. Esta elección garantiza que las rutas identificadas reflejen fielmente las condiciones topográficas reales del terreno.

2.9. Resultados cuantitativos

La Tabla 3.2 presenta las rutas óptimas hacia los 10 municipios con mayor valor PageRank, incluyendo las métricas de distancia 2D, distancia 3D, incremento por efecto topográfico y tiempo estimado de recorrido.

FALTA PONER LA TABLE DE LOS RESULTADOS Y LA EXPLICACION

3. Sistema Integrado de Decisión para Operaciones con Drones

Este capítulo presenta un marco matemáticamente fundamentado para la toma de decisiones operativas en el despliegue de drones para transporte de ayuda humanitaria. Se desarrolla un modelo de **pronóstico advectivo a corto plazo** (*nowcasting*) que integra técnicas de análisis espectral, series de tiempo y teoría de decisión bajo incertidumbre. El sistema evalúa la viabilidad de operaciones aéreas mediante la cuantificación de variables meteorológicas críticas (velocidad del viento, temperatura, humedad relativa y precipitación) a lo largo de una ruta específica: Aeropuerto Internacional Ángel Albino Corzo hacia Protección Civil en Tuxtla Gutiérrez, Chiapas. La metodología propuesta garantiza la seguridad operacional mediante una política conservadora de tolerancia cero frente a violaciones de umbrales técnicos, proporcionando un protocolo reproducible para la logística humanitaria en entornos meteorológicos variables.

El transporte aéreo mediante drones representa una alternativa prometedora para la distribución rápida de ayuda humanitaria en escenarios de emergencia, particularmente en regiones con topografía accidentada o infraestructura terrestre comprometida. No obstante, la operación segura de aeronaves no tripuladas está condicionada por factores ambientales que pueden comprometer tanto la estabilidad del vuelo como la integridad de los sistemas electrónicos a bordo.

En el contexto específico del estado de Chiapas, caracterizado por una dinámica atmosférica compleja derivada de su configuración orográfica, resulta fundamental disponer de herramientas predictivas que permitan anticipar las condiciones meteorológicas a lo largo de la trayectoria de vuelo. Este capítulo aborda el problema mediante un enfoque integrado que combina:

1. **Modelación geométrica terrestre:** Representación esférica de la superficie terrestre para el cálculo preciso de distancias geodésicas y direcciones de desplazamiento.
2. **Análisis de transporte atmosférico:** Estimación de la **velocidad de advección** mediante dos metodologías complementarias: correlación cruzada entre segmentos espaciales adyacentes y análisis frecuencia-espacio ($f-k$) basado en la pendiente de fase espectral.
3. **Pronóstico híbrido:** Combinación convexa de componentes advectiva, autorregresiva y de persistencia para generar nowcasts de corto horizonte (60 minutos).

4. **Cuantificación de incertidumbre:** Aplicación de block bootstrap temporal para construir intervalos de confianza robustos que preservan la dependencia serial de las series meteorológicas.
5. **Teoría de decisión:** Formulación rigurosa del problema de viabilidad operacional como un problema de decisión multicriterio en condiciones de incertidumbre, con región factible definida por restricciones técnicas del dron.

El flujo metodológico se organiza en tres etapas secuenciales: (i) estimación de la velocidad de advección dominante, (ii) generación de pronósticos espaciales para variables meteorológicas críticas, y (iii) evaluación de la viabilidad operacional mediante una función de decisión binaria. Esta estructura permite transformar observaciones meteorológicas en recomendaciones operativas con fundamentos matemáticos explícitos, constituyendo un aporte significativo para la logística humanitaria en contextos de alta incertidumbre ambiental.

3.1. Contexto operativo: Aeropuerto Internacional Ángel Albino Corzo hacia Protección Civil

El desarrollo del modelo matemático presentado en este capítulo responde a una aplicación concreta en el ámbito de la logística humanitaria mediante drones. El objetivo operativo consiste en apoyar el traslado de ayuda humanitaria en situaciones de emergencia, donde las condiciones meteorológicas pueden comprometer la seguridad y eficiencia del vuelo.

3.1.1. Caso de estudio

El caso de estudio corresponde a una ruta estratégica dentro del municipio de Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, que inicia en el **Aeropuerto Internacional Ángel Albino Corzo** y finaliza en las instalaciones de **Protección Civil** del estado. Esta ruta representa un corredor logístico relevante en escenarios de contingencia, en los cuales el uso de drones permite reducir tiempos de respuesta y acceder a zonas con infraestructura terrestre limitada o afectada.

Nota

Características operativas de la ruta

- **Longitud aproximada:** 28.5 km (distancia geodésica 3D)
- **Duración estimada del vuelo:** 18–22 minutos bajo condiciones meteorológicas favorables
- **Altitud media de operación:** 120–150 m sobre el nivel del terreno
- **Topografía predominante:** Valle Central de Chiapas con pendientes mode-

radas ($< 5\%$)

- **Puntos críticos:** Cruce del Río Grijalva y zona urbana densa en aproximación a Protección Civil

3.1.2. Discretización espacial de la trayectoria

Para el análisis de navegación, la trayectoria completa se discretiza en N segmentos espaciales consecutivos. Cada segmento se representa mediante su centroide longitudinal s_i , lo que permite transformar el problema continuo de transporte atmosférico en un esquema discreto espacio-temporal adecuado para estimación y pronóstico numérico.

Matemáticamente, sea $\mathcal{R} = \{P_0, P_1, \dots, P_M\}$ la secuencia de puntos geográficos que definen la ruta, donde $P_k = (\varphi_k, \lambda_k)$ representa las coordenadas geodésicas del punto k -ésimo. La partición en segmentos se construye mediante:

$$s_i = \frac{1}{|\mathcal{J}_i|} \sum_{k \in \mathcal{J}_i} d(P_0, P_k), \quad i = 1, \dots, N,$$

donde $d(P_0, P_k)$ denota la distancia geodésica acumulada desde el punto inicial P_0 hasta P_k , y $\mathcal{J}_i$ es el conjunto de índices correspondientes al segmento i .

La discretización espacial cumple dos funciones fundamentales:

1. **Evaluación de coherencia espacial:** Permite analizar la variabilidad de las variables meteorológicas a lo largo de la ruta de vuelo, identificando zonas críticas donde las condiciones podrían comprometer la operación del dron.
2. **Modelación del transporte advectivo:** Facilita la representación del fenómeno atmosférico como un proceso unidimensional dominante, consistente con la orientación principal del trayecto de vuelo.

3.1.3. Horizonte temporal de análisis

El horizonte de pronóstico considerado para la toma de decisiones operativas es de **60 minutos** a partir del momento actual t_0 . Este intervalo se discretiza en pasos temporales de $\Delta t = 5$ minutos, generando un conjunto de instantes:

$$\mathcal{T} = \{t_0, t_1, \dots, t_{12}\}, \quad t_k = t_0 + k\Delta t.$$

Este horizonte resulta apropiado para operaciones de drones de corto alcance, ya que:

- Es consistente con la autonomía típica de aeronaves no tripuladas de carga media (20–30 minutos de vuelo efectivo más margen de seguridad).

- Permite anticipar cambios meteorológicos de escala sinóptica menor que afectan directamente la estabilidad del vuelo.
- Facilita la reprogramación operativa en caso de deterioro de las condiciones ambientales.

3.1.4. Variables meteorológicas críticas

El modelo de decisión considera cuatro variables ambientales cuyas condiciones determinan la viabilidad operativa:

Variable	Símbolo	Unidad	Relevancia operativa
Velocidad del viento	V	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	Estabilidad aerodinámica y consumo energético
Temperatura del aire	T	$^{\circ}\text{C}$	Rendimiento de baterías y sistemas electrónicos
Humedad relativa	H	Fracción $[0, 1]$	Riesgo de condensación en sensores y circuitos
Precipitación	R	$\text{mm} \cdot \text{h}^{-1}$	Seguridad estructural y visibilidad

Estas variables se monitorean y pronostican en cada segmento espacial s_i y en cada instante t_k del horizonte temporal, generando un campo espacio-temporal discreto $\mathbf{X}(s_i, t_k)$ que constituye la entrada al sistema de decisión.

3.1.5. Integración con la cadena logística

Esta etapa de transporte aéreo constituye el primer eslabón de la cadena logística integrada propuesta en esta tesis. Una vez completada la operación del dron y depositada la ayuda humanitaria en las instalaciones de Protección Civil, se activa la segunda etapa: la distribución terrestre optimizada mediante el algoritmo PageRank descrito en el Capítulo 3. Esta integración secuencial permite combinar la rapidez del transporte aéreo con la cobertura territorial del sistema vial estatal, maximizando la eficiencia global de la respuesta humanitaria.

3.2. Marco del modelo geométrico terrestre

3.2.1. Representación esférica de la superficie terrestre

La implementación desarrollada se fundamenta en un modelo geométrico esférico de la Tierra, en el cual cada punto geográfico se describe mediante un par de coordenadas

angulares correspondientes a la latitud y la longitud. En este contexto, un punto sobre la superficie terrestre se representa como:

$$(\varphi, \lambda) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times [-\pi, \pi],$$

donde φ denota la latitud y λ la longitud, ambas expresadas en radianes.

Se adopta la hipótesis de que la Tierra puede aproximarse por una esfera de radio constante:

$$R = 6,371,000 \text{ m.}$$

Esta suposición es estándar en problemas de navegación aérea de corto alcance y resulta adecuada para trayectorias del orden de decenas de kilómetros, como las consideradas en este trabajo para la operación de drones. El error introducido por esta aproximación es despreciable frente a otras fuentes de incertidumbre inherentes a los datos meteorológicos.

3.2.2. Distancia geodésica entre puntos geográficos

Sean $P_1 = (\varphi_1, \lambda_1)$ y $P_2 = (\varphi_2, \lambda_2)$ dos puntos sobre la superficie esférica terrestre. La distancia mínima entre ambos puntos se define como la longitud del arco del círculo máximo que los une. Dicha distancia puede expresarse como:

$$d = R \Delta\sigma,$$

donde $\Delta\sigma$ representa el ángulo central subtendido por los puntos P_1 y P_2 en el centro de la esfera.

Para el cálculo de este ángulo se emplea la fórmula del **haverseno**, la cual es particularmente estable desde el punto de vista numérico, incluso para distancias pequeñas. La función haverseno se define como:

$$\text{hav}(\theta) = \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right). \quad (3.2.1)$$

Bajo esta definición, el ángulo central satisface la relación:

$$\text{hav}(\Delta\sigma) = \text{hav}(\varphi_2 - \varphi_1) + \cos(\varphi_1) \cos(\varphi_2) \text{hav}(\lambda_2 - \lambda_1). \quad (3.2.2)$$

Desarrollando explícitamente esta expresión, se introduce la variable auxiliar:

$$a = \sin^2 \left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \right) + \cos(\varphi_1) \cos(\varphi_2) \sin^2 \left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} \right),$$

a partir de la cual el ángulo central puede escribirse como:

$$\Delta\sigma = 2 \arctan \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{1-a}} \right).$$

En consecuencia, la distancia geodésica entre los puntos queda finalmente dada por:

$$d = 2R \arctan \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{1-a}} \right).$$

La función `haversine_m`, implementada en el lenguaje de programación Python, traduce directamente esta expresión matemática al ámbito computacional, garantizando una correspondencia exacta entre el modelo teórico y su realización numérica. Esta formulación es ampliamente utilizada en aplicaciones de navegación aérea, marítima y satelital.

3.2.3. Dirección de desplazamiento: rumbo inicial geodésico

Además de la distancia, resulta fundamental determinar la dirección del desplazamiento entre dos puntos geográficos. El **rumbo inicial**, o *bearing*, se define como el ángulo formado entre la dirección del norte geográfico y la dirección del movimiento desde el punto P_1 hacia el punto P_2 , medido en sentido horario.

Desde el punto de vista geométrico, este ángulo puede deducirse considerando el triángulo esférico formado por el polo norte, el punto inicial P_1 y el punto final P_2 . A partir de relaciones de trigonometría esférica Snyder (1987), el rumbo inicial θ viene dado por:

$$\theta = \arctan \left(\frac{\sin(\Delta\lambda) \cos(\varphi_2)}{\cos(\varphi_1) \sin(\varphi_2) - \sin(\varphi_1) \cos(\varphi_2) \cos(\Delta\lambda)} \right),$$

donde $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$.

Dado que la función arco tangente devuelve valores en el intervalo $(-\pi, \pi)$, es necesario normalizar el resultado para obtener un ángulo expresado en grados dentro del rango $[0, 360)$. Esta normalización se realiza mediante la transformación:

$$\theta_{\text{deg}} = \left(\theta \cdot \frac{180}{\pi} + 360 \right) \bmod 360.$$

La función `bearing_deg` implementa esta expresión de forma directa, proporcionando el rumbo inicial geodésico sobre una esfera.

El cálculo de distancias y direcciones entre puntos geográficos se modela considerando la superficie terrestre como una esfera de radio constante. Bajo esta hipótesis, la distancia mínima entre dos puntos se obtiene como la longitud del arco de círculo máximo que los une, calculada mediante la fórmula del haverseno (Ecuación 3.2.1). Asimismo, el rumbo inicial se determina a partir de relaciones trigonométricas esféricas, permitiendo establecer la orientación de la trayectoria con respecto al norte geográfico. Estas magnitudes son fundamentales para proyectar correctamente las variables meteorológicas, particularmente el viento, sobre la ruta de navegación del dron.

3.2.4. Aplicación a la discretización de la ruta de vuelo

En el contexto específico de la ruta Aeropuerto Internacional Ángel Albino Corzo hacia Protección Civil, la trayectoria se discretiza en N segmentos espaciales consecutivos. Cada segmento se representa mediante su centroide longitudinal s_i , calculado como la distancia geodésica acumulada desde el punto inicial:

$$s_i = \sum_{k=1}^i d(P_{k-1}, P_k),$$

donde $d(P_{k-1}, P_k)$ denota la distancia geodésica entre puntos consecutivos de la trayectoria.

Esta discretización permite transformar el problema continuo de transporte atmosférico en un esquema discreto espacio-temporal adecuado para estimación y pronóstico numérico, facilitando tanto el análisis de coherencia espacial como la modelación del transporte advectivo unidimensional.

3.3. Estimación de la velocidad de advección mediante correlación cruzada y análisis f - k

3.3.1. Introducción al problema de estimación

El pronóstico de variables meteorológicas a lo largo de la ruta de vuelo del dron requiere estimar la velocidad de advección dominante, entendida como la velocidad con la que las estructuras atmosféricas se propagan en la dirección de la trayectoria. Esta magnitud constituye un parámetro fundamental para el modelo de pronóstico advectivo, ya que determina la posición espacial desde donde se extrae información para predecir el estado futuro en cada segmento.

En este trabajo se proponen dos metodologías complementarias para la estimación de la velocidad de advección:

1. **Análisis de correlación cruzada entre segmentos adyacentes:** Método basado en la identificación de retardos temporales coherentes entre señales medidas en posiciones espaciales consecutivas.
2. **Análisis frecuencia-espacio (f - k) basado en pendiente de fase:** Enfoque espectral que estima la velocidad a partir de la variación espacial de la fase del campo meteorológico.

Ambos métodos se aplican secuencialmente, utilizando el segundo como alternativa robusta cuando el primero no proporciona resultados estadísticamente confiables.

3.3.2. Estimación mediante correlación cruzada entre segmentos adyacentes

3.3.2.1. Formulación matemática

Sea la ruta discretizada en N segmentos consecutivos, cada uno asociado a una señal temporal suavizada $\{x_i(t)\}$, donde el subíndice i indica el segmento espacial y t representa el tiempo de muestreo. Para cada par de segmentos adyacentes $(i, i + 1)$, se calcula la función de correlación cruzada discreta:

$$\rho_{i,i+1}(k) = \text{corr}(x_i(t), x_{i+1}(t + k)),$$

donde k es un desfase temporal entero expresado en número de pasos de muestreo. El análisis se restringe a desfases pertenecientes a un intervalo simétrico $[-K, K]$, donde K corresponde a un máximo de tiempo físicamente razonable para el desplazamiento del fenómeno entre segmentos adyacentes.

Para cada par $(i, i + 1)$, se identifica el desfase dominante:

$$k_{i,i+1}^* = \arg \max_k |\rho_{i,i+1}(k)|,$$

junto con el valor máximo de correlación asociado:

$$\rho_{i,i+1}^{\max} = \max_k |\rho_{i,i+1}(k)|.$$

El desfase $k_{i,i+1}^*$ se interpreta como una estimación del retardo temporal con el que la señal observada en el segmento i se reproduce en el segmento $i + 1$.

3.3.2.2. Criterio de aceptación global

No todos los pares de segmentos proporcionan información fiable para la estimación de la velocidad. Por ello, se introduce un criterio de aceptación global basado en la fracción de pares adyacentes que presentan simultáneamente una correlación suficientemente alta y un desfase no nulo. Denotando por $\rho_{\min}$ un umbral mínimo de correlación y por $\gamma_{\min}$ una fracción mínima aceptable, el método se considera válido si:

$$\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{1}_{\{|\rho_{i,i+1}^{\max}| > \rho_{\min} \wedge k_{i,i+1}^* \neq 0\}} \geq \gamma_{\min},$$

donde $\mathbf{1}(\cdot)$ denota la función indicadora. Este criterio permite descartar situaciones en las que la coherencia espacial de la señal es insuficiente para inferir un desplazamiento dominante.

3.3.2.3. Relación distancia–tiempo y estimación de la velocidad

Una vez aceptado el conjunto de correlaciones, el desfase temporal estimado para cada par de segmentos se convierte en un tiempo físico mediante:

$$t_{i,i+1} = |k_{i,i+1}^*| \Delta t,$$

donde Δt es el intervalo de muestreo en segundos. De forma análoga, se define la distancia espacial entre segmentos adyacentes como:

$$d_{i,i+1} = |s_{i+1} - s_i|,$$

siendo s_i la coordenada longitudinal del centroide del segmento i a lo largo de la ruta.

Bajo la hipótesis de advección aproximadamente uniforme, se espera una relación lineal entre el tiempo de desplazamiento y la distancia recorrida, dada por:

$$t_{i,i+1} = m d_{i,i+1} + c,$$

donde m representa el inverso de la velocidad media de advección y c recoge posibles efectos sistemáticos o errores de alineación temporal.

La estimación de los parámetros se realiza mediante un ajuste por mínimos cuadrados ponderados, asignando a cada par un peso proporcional a la magnitud de su correlación máxima:

$$w_{i,i+1} = |\rho_{i,i+1}^{\max}|.$$

En forma matricial, el problema se escribe como:

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{m} \\ \hat{c} \end{pmatrix} = (X^\top W X)^{-1} X^\top W t,$$

donde $X = [d_{i,i+1}, 1]$, $t = [t_{i,i+1}]$ y W es una matriz diagonal cuyos elementos son los pesos $w_{i,i+1}$.

Finalmente, la velocidad efectiva de advección se estima como:

$$\hat{v}_{\text{CCF}} = \frac{1}{\hat{m}},$$

siempre que $\hat{m} \neq 0$. Esta magnitud se expresa en metros por segundo y constituye una estimación empírica de la velocidad con la que la señal meteorológica se propaga a lo largo de la ruta.

3.3.3. Estimación mediante análisis f - k basado en pendiente de fase

3.3.3.1. Fundamentos teóricos

Cuando el análisis de correlación cruzada entre segmentos adyacentes no proporciona resultados estadísticamente confiables, se adopta un enfoque alternativo basado en el análisis conjunto en frecuencia y espacio, conocido como análisis f - k Hayashi (1973). Este método permite estimar la velocidad de propagación de estructuras coherentes a partir de la variación espacial de la fase espectral, y resulta particularmente adecuado cuando la señal presenta un carácter oscilatorio dominante.

Sea $M(s, t)$ una matriz de datos obtenida a partir de los valores suavizados de una variable meteorológica, donde s representa la coordenada longitudinal a lo largo de la ruta de navegación y t el tiempo. Cada fila de la matriz M corresponde a un segmento espacial, caracterizado por su posición centroidal s_i , y cada columna a un instante temporal muestreado uniformemente con paso Δt .

Para cada segmento s_i , se calcula la transformada de Fourier temporal:

$$\hat{M}(s_i, \omega) = \int M(s_i, t) e^{-i\omega t} dt,$$

obteniéndose así un **espectro complejo** cuya fase contiene información sobre el desplazamiento espacial de las estructuras dominantes de la señal.

3.3.3.2. Modelo de onda viajera y relación de fase

Bajo la hipótesis de que el campo meteorológico puede aproximarse localmente como una onda viajera unidimensional, se modela la señal como:

$$M(s, t) = A \cos(ks - \omega t + \phi_0),$$

donde k es el número de onda espacial, ω la frecuencia angular y ϕ_0 una fase constante. En este caso, la fase espectral satisface la relación lineal:

$$\phi(s) = ks + \phi_0.$$

Por tanto, para una frecuencia fija ω , la fase desenrollada $\phi(s_i)$ puede aproximarse mediante un modelo de regresión lineal:

$$\phi(s_i) = \alpha s_i + \beta + \varepsilon_i,$$

donde α es una estimación empírica del número de onda k , β es una constante y ε_i representa errores debidos a ruido y no idealidades del modelo.

3.3.3.3. Estimación de la velocidad de propagación

La pendiente $\hat{k} = \alpha$ se estima mediante mínimos cuadrados ordinarios sobre el conjunto de segmentos espaciales. Una vez obtenida esta pendiente, la velocidad de propagación v se calcula utilizando la relación fundamental de ondas:

$$v = \frac{\omega}{k}.$$

En términos del estimador, la velocidad asociada a una frecuencia ω se obtiene como:

$$\hat{v} = -\frac{\omega}{\hat{k}},$$

donde el signo negativo refleja la convención adoptada para la orientación espacial y temporal del sistema de coordenadas.

Este procedimiento se repite para un conjunto de frecuencias positivas seleccionadas dentro de una banda de interés, correspondiente a escalas temporales relevantes para la dinámica atmosférica considerada. Para cada frecuencia se obtiene un estimador de velocidad, generando así un conjunto de candidatos $\{\hat{v}_j\}$.

Con el fin de robustecer la estimación final frente a valores atípicos y a frecuencias poco representativas, se selecciona como estimador definitivo la mediana de los valores finitos y físicamente plausibles del conjunto $\{\hat{v}_j\}$. Este criterio reduce la sensibilidad a ruido espectral y a desviaciones locales del modelo de onda viajera.

El análisis f - k permite, por tanto, inferir la velocidad de advección directamente a partir de la estructura de fase del campo meteorológico, sin requerir alineamiento temporal explícito entre segmentos. Este enfoque complementa al método basado en correlación cruzada y proporciona una alternativa sólida cuando la coherencia temporal entre señales adyacentes es insuficiente.

3.3.4. Modelo de respaldo: persistencia temporal y regularización advectiva

3.3.4.1. Motivación

Cuando ambos métodos anteriores fallan, es decir, cuando no se dispone de suficiente coherencia espacial ni estructura espectral clara, se recurre a un **modelo de respaldo** basado en persistencia temporal con corrección advectiva regularizada. El objetivo de este modelo no es proporcionar una estimación precisa de la velocidad, sino una **cota conservadora** del transporte medio, entendido como el desplazamiento promedio del patrón espacial de la variable atmosférica a lo largo de la ruta.

3.3.4.2. Modelo AR(1) por segmento espacial

Sea $y_i(t)$ la serie temporal correspondiente al segmento espacial s_i . Se modela mediante un proceso autorregresivo de orden uno:

$$y_i(t + \Delta t) = a_i y_i(t) + \varepsilon_i(t),$$

donde a_i es el coeficiente de persistencia temporal y $\varepsilon_i(t)$ representa un término de ruido no correlacionado.

El coeficiente a_i se estima mediante mínimos cuadrados ordinarios:

$$a_i = \arg \min_a \sum_k (y_i(t_{k+1}) - a y_i(t_k))^2.$$

Para obtener un parámetro representativo del sistema completo, se define:

$$a_{\text{med}} = \text{mediana}_i(a_i),$$

lo que reduce la influencia de segmentos atípicos o ruidosos.

3.3.4.3. Estimación advectiva regularizada

Se define la media espacial de la señal como:

$$\bar{y}(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i(t),$$

la cual se suaviza mediante un filtro robusto (mediana móvil). Su derivada temporal se aproxima por diferencias finitas:

$$\frac{d\bar{y}}{dt}(t) \approx \frac{\bar{y}(t + \Delta t) - \bar{y}(t)}{\Delta t}.$$

Bajo un modelo advectivo unidimensional simplificado:

$$\frac{\partial y}{\partial t} + v \frac{\partial y}{\partial s} \approx 0,$$

la velocidad puede relacionarse de forma heurística con la tasa de cambio temporal promedio. Así, se define una estimación conservadora de la velocidad:

$$v_{\text{fallback}} = -\lambda \text{mediana} \left(\frac{d\bar{y}}{dt} \right),$$

donde $\lambda > 0$ es un factor de regularización pequeño que atenúa la magnitud de la estimación para evitar sobreajustes o interpretaciones físicas no realistas.

Este modelo de respaldo garantiza que siempre se disponga de una estimación de la velocidad de advección, aunque sea conservadora, permitiendo la generación de pronósticos incluso en condiciones de baja coherencia espacial.

3.4. Pronóstico advectivo a corto plazo (nowcasting)

3.4.1. Formulación del problema de pronóstico

Una vez estimada la velocidad advectiva dominante v a lo largo de la ruta, se utiliza un modelo de pronóstico determinista a corto plazo (*nowcast*) con horizonte H . El objetivo consiste en predecir la evolución temporal de las variables climáticas en cada segmento espacial s_i durante el período de interés.

Sea $y_i(t)$ el valor observado de una variable climática (por ejemplo, velocidad del viento proyectada) en el segmento espacial i en el tiempo t , y sea s_i la posición longitudinal del centroide del segmento i . El pronóstico $\hat{y}_i(t + H)$ se construye mediante la combinación de tres componentes fundamentales: advectiva, autorregresiva y de persistencia.

3.4.2. Componente advectiva

Bajo la hipótesis de transporte advectivo unidimensional, el valor futuro de la variable en el segmento i se asocia al valor observado en la posición precedente en la dirección del flujo:

$$s_i^{\text{up}} = s_i - vH,$$

donde:

- v es la velocidad advectiva estimada,
- H es el horizonte de pronóstico (en segundos).

El valor estimado por advección se aproxima mediante interpolación lineal espacial:

$$y_i^{\text{adv}}(t + H) = \begin{cases} y_1(t), & s_i^{\text{up}} \leq s_1, \\ y_j(t) + \frac{s_i^{\text{up}} - s_j}{s_{j+1} - s_j} (y_{j+1}(t) - y_j(t)), & s_j \leq s_i^{\text{up}} < s_{j+1}, \end{cases}$$

donde s_j y s_{j+1} son los segmentos que delimitan la posición aguas arriba.

Este término modela el **desplazamiento espacial coherente** de la señal climática y constituye una aproximación discreta del operador de transporte asociado a la ecuación de advección unidimensional:

$$\frac{\partial y}{\partial t} + v \frac{\partial y}{\partial s} \approx 0.$$

3.4.3. Componente autorregresiva temporal

Para capturar la persistencia temporal local, cada segmento se modela mediante un proceso autorregresivo de primer orden:

$$y_i(t + \Delta t) = a_i y_i(t) + \varepsilon_i(t),$$

donde $a_i \in (0, 1)$ es el coeficiente AR(1) estimado por mínimos cuadrados ordinarios y $\varepsilon_i(t)$ representa un término de ruido no correlacionado.

En segmentos con información insuficiente, se utiliza un valor regularizado $\tilde{a}_i$, correspondiente a la mediana de los coeficientes válidos. El pronóstico autorregresivo a horizonte $H = n\Delta t$ queda entonces:

$$y_i^{\text{AR}}(t + H) = a_i^n y_i(t). \quad (4.3)$$

Esta componente permite modelar la inercia temporal inherente a las variables meteorológicas, especialmente relevante para variables como la temperatura que presentan alta persistencia.

3.4.4. Componente de persistencia

Como referencia conservadora, se incluye el modelo de persistencia:

$$y_i^{\text{pers}}(t + H) = y_i(t),$$

el cual asume ausencia total de cambio temporal. Este término proporciona estabilidad al pronóstico cuando la información disponible es limitada o cuando las condiciones atmosféricas presentan baja variabilidad.

3.4.5. Modelo híbrido de pronóstico

El pronóstico final se construye como una combinación convexa de los tres componentes:

$$\hat{y}_i(t + H) = w_1 y_i^{\text{AR}}(t + H) + w_2 y_i^{\text{pers}}(t + H) + w_3 y_i^{\text{adv}}(t + H),$$

con

$$w_1 + w_2 + w_3 = 1, \quad w_k \geq 0.$$

En esta implementación se utilizan pesos fijos:

$$(w_1, w_2, w_3) = (0.5, 0.3, 0.2),$$

priorizando la estabilidad temporal sin perder sensibilidad al transporte espacial. Este enfoque híbrido permite balancear persistencia, dinámica local y estructura espacial, lo cual resulta particularmente adecuado para pronósticos operativos de corto plazo.

3.4.6. Propiedades del modelo híbrido

El modelo de pronóstico propuesto presenta las siguientes propiedades:

1. **Consistencia espacial:** La componente advectiva garantiza que el patrón espacial de la variable se propague coherentemente a lo largo de la ruta, respetando la dirección y magnitud del flujo atmosférico dominante.
2. **Estabilidad temporal:** La componente autorregresiva proporciona suavidad temporal y evita oscilaciones espurias en el pronóstico, especialmente en segmentos con baja variabilidad observada.
3. **Robustez numérica:** La inclusión del término de persistencia asegura que el pronóstico permanezca acotado incluso en situaciones donde las estimaciones advectivas o autorregresivas puedan ser inestables.
4. **Interpretabilidad física:** Cada componente del modelo tiene una interpretación física clara relacionada con procesos atmosféricos bien establecidos (advección, persistencia y difusión).

3.4.7. Implementación computacional

La implementación del modelo híbrido sigue el siguiente algoritmo:

1. **Estimación de parámetros:** Para cada segmento i , se calculan los coeficientes a_i mediante regresión lineal sobre la serie temporal observada.
2. **Cálculo de posición advectiva:** Para cada segmento i y horizonte H , se determina $s_i^{\text{up}} = s_i - vH$.
3. **Interpolación espacial:** Se obtiene $y_i^{\text{adv}}(t + H)$ mediante interpolación lineal entre los segmentos adyacentes que contienen s_i^{up} .
4. **Pronóstico autorregresivo:** Se calcula $y_i^{\text{AR}}(t + H) = a_i^n y_i(t)$ con $n = H/\Delta t$.
5. **Combinación convexa:** Se obtiene el pronóstico final $\hat{y}_i(t + H)$ mediante la combinación ponderada de los tres componentes.

La complejidad computacional del algoritmo es $\mathcal{O}(N)$, donde N es el número de segmentos espaciales, lo que permite su ejecución en tiempo real incluso en sistemas embebidos con recursos limitados.

3.4.8. Consideraciones sobre el horizonte de pronóstico

El horizonte de pronóstico H constituye un parámetro crítico que determina el equilibrio entre precisión y utilidad operativa del nowcast. Para el caso de operaciones con drones, se adopta un horizonte de $H = 60$ minutos, basado en las siguientes consideraciones:

- **Autonomía de vuelo:** La mayoría de los drones de carga media tienen una autonomía de 20–30 minutos de vuelo efectivo, por lo que un horizonte de 60 minutos permite evaluar múltiples ciclos operativos.
- **Escalas temporales atmosféricas:** Las variables meteorológicas relevantes para la navegación de drones (viento, temperatura, humedad) presentan escalas de correlación temporal del orden de decenas de minutos, lo que justifica un horizonte de pronóstico en este rango.
- **Replanificación operativa:** Un horizonte de 60 minutos proporciona suficiente tiempo para la toma de decisiones y la reprogramación de misiones en caso de deterioro de las condiciones ambientales.

Este horizonte se discretiza en pasos temporales de $\Delta t = 5$ minutos, generando un conjunto de 12 instantes de pronóstico que permiten evaluar la evolución temporal continua de las condiciones meteorológicas.

3.5. Aplicación del modelo advectivo a la temperatura del aire

En esta sección se particulariza el esquema advectivo–autorregresivo previamente formulado al caso de la temperatura del aire, con el objetivo de obtener un pronóstico espacial de corto horizonte a lo largo de la ruta de vuelo del dron.

La estructura matemática del modelo se mantiene sin modificaciones respecto a la formulación general presentada anteriormente. En consecuencia, los componentes advectivo, autorregresivo y el procedimiento de cuantificación de incertidumbre se conservan en la misma forma funcional. Únicamente se recalibran los parámetros específicos del campo térmico, a fin de reflejar su mayor persistencia temporal y su elevada coherencia espacial en comparación con otras variables atmosféricas.

La formulación obtenida para la temperatura constituye, por tanto, el caso de referencia sobre el cual se apoyará la modelización de las restantes variables ambientales, introduciendo únicamente los ajustes paramétricos o estructurales que resulten necesarios en cada caso.

3.5.1. Variable de estudio y discretización espacial

Sea $T(s, t)$ la temperatura del aire en la posición longitudinal s de la ruta y en el tiempo t .

La ruta se discretiza en N segmentos espaciales, definidos a partir del promedio de los puntos de muestreo cercanos, y cada segmento queda representado por su centroide s_i . La serie temporal asociada al segmento i se denota como:

$$T_i(t) = \frac{1}{|\mathcal{S}_i|} \sum_{k \in \mathcal{S}_i} T_k(t),$$

donde $\mathcal{S}_i$ es el conjunto de puntos de muestreo que conforman el segmento i .

Esta agregación espacial permite reducir el ruido de medición y obtener estimaciones más robustas de la temperatura promedio en cada segmento de la trayectoria.

3.5.2. Hipótesis de advección con velocidad conocida

A diferencia del caso del viento, para la temperatura se adopta una **velocidad de advección fija**, obtenida previamente del análisis del campo de viento:

$$v = v_{\text{viento}}.$$

Esta hipótesis se fundamenta en que la temperatura del aire se transporta pasivamente por el flujo atmosférico dominante, sin presentar una dinámica de propagación independiente. Por tanto, la velocidad de advección térmica coincide con la velocidad del viento medio en la capa límite atmosférica donde opera el dron.

3.5.3. Componente advectiva del pronóstico

Bajo el supuesto de advección unidimensional, el valor futuro de la temperatura en el segmento i se asocia al valor observado en la posición precedente en la dirección del flujo:

$$s_i^{\text{up}} = s_i - vH,$$

donde H es el horizonte de pronóstico y v la velocidad media de transporte.

El valor estimado por advección se aproxima mediante interpolación lineal espacial:

$$T_i^{\text{adv}}(t + H) = \begin{cases} T_1(t), & s_i^{\text{up}} \leq s_1, \\ T_j(t) + \frac{s_i^{\text{up}} - s_j}{s_{j+1} - s_j} (T_{j+1}(t) - T_j(t)), & s_j \leq s_i^{\text{up}} < s_{j+1}. \end{cases}$$

Sea $\{s_1, \dots, s_N\}$ una partición ordenada del dominio espacial $[0, L]$, con

$$s_1 < s_2 < \dots < s_N.$$

Para cada índice $i \in \{1, \dots, N\}$, el subíndice j se define como el único entero en $\{1, \dots, N-1\}$ que satisface

$$s_j \leq s_i^{\text{up}} < s_{j+1}.$$

En consecuencia, $j = j(i)$ depende del segmento destino i a través de la posición advectiva s_i^{up} . Esta construcción garantiza que la interpolación se realice en el intervalo espacial que contiene el punto de origen advectivo.

En el caso $s_i^{\text{up}} \leq s_1$, el punto advectivo queda fuera del dominio por el extremo izquierdo, por lo que se adopta una extrapolación constante basada en el valor del primer nodo.

Este término representa el **transporte térmico dominante** a lo largo de la ruta y constituye una aproximación discreta del operador de transporte asociado a la ecuación de advección unidimensional.

3.5.4. Componente autorregresiva temporal

La temperatura presenta una elevada persistencia temporal, característica de variables termodinámicas con alta inercia física, es decir, la temperatura del aire no experimenta cambios abruptos en escalas temporales cortas debido a la capacidad calorífica del medio atmosférico, que requiere intercambios energéticos significativos para modificar su estado térmico. Por ello, cada segmento se modela mediante un proceso autorregresivo de primer orden:

$$T_i(t + \Delta t) = a_i T_i(t),$$

donde $a_i \in (0, 1)$ es el coeficiente estimado por mínimos cuadrados ordinarios.

El pronóstico autorregresivo a horizonte $H = n\Delta t$ se expresa como:

$$T_i^{\text{AR}}(t + H) = a_i^n T_i(t).$$

En los segmentos donde la información temporal resulta insuficiente (menos de 10 observaciones), se emplea un valor regularizado $a_i = 0.95$, consistente con la elevada inercia térmica del sistema atmosférico en escalas temporales de minutos.

3.5.5. Modelo híbrido de nowcasting para temperatura

El pronóstico final se obtiene mediante una combinación convexa de tres componentes: autorregresiva, persistente y advectiva:

$$\hat{T}_i(t+H) = w_1 T_i^{\text{AR}}(t+H) + w_2 T_i(t) + w_3 T_i^{\text{adv}}(t+H),$$

con

$$w_1 + w_2 + w_3 = 1, \quad w_k \geq 0.$$

Para el caso de la temperatura se adoptaron los pesos fijos:

$$(w_1, w_2, w_3) = (0.4, 0.2, 0.4),$$

asignando mayor relevancia al transporte advectivo y a la persistencia temporal, en concordancia con la naturaleza física de la variable. Esta ponderación refleja que la temperatura del aire presenta:

- Alta coherencia espacial debido al transporte advectivo dominante,
- Elevada persistencia temporal por su inercia termodinámica,
- Baja variabilidad intrínseca en escalas temporales cortas.

3.5.6. Estimación de la incertidumbre mediante block bootstrap

La incertidumbre del pronóstico se cuantificó mediante un procedimiento de **block bootstrap temporal**, que preserva la dependencia serial de las observaciones.

Sea $\{T_i(t)\}_{t=1}^T$ la serie observada. Se generan B réplicas bootstrap mediante remuestreo con reemplazo de bloques temporales de longitud L . Para cada réplica b , se calcula un pronóstico:

$$\hat{T}_i^{(b)}(t+H).$$

A partir de la distribución empírica resultante se estiman los cuantiles:

$$p05_i, \quad p50_i, \quad p95_i,$$

los cuales definen intervalos de confianza del 90 % para el nowcast de temperatura en cada segmento.

El uso de bloques temporales de longitud $L = 15$ minutos (mayores que en el caso del viento) refleja la mayor continuidad temporal y menor variabilidad de la temperatura del aire.

3.5.7. Discusión y propiedades del modelo

Es importante destacar que la estructura matemática del modelo es **independiente de la variable climática analizada**. En consecuencia, la metodología puede aplicarse de manera consistente a viento, temperatura o precipitación, modificando únicamente los parámetros y la interpretación física de la variable transportada.

Las principales ventajas de este enfoque para la temperatura son:

1. **Consistencia física:** El modelo respeta la ecuación de advección unidimensional que gobierna el transporte pasivo de calor en la atmósfera.
2. **Adaptabilidad espacial:** La discretización en segmentos permite capturar gradientes térmicos locales a lo largo de la ruta de vuelo.
3. **Robustez estadística:** La combinación de componentes advectiva y autorregresiva proporciona estabilidad frente a perturbaciones puntuales en los datos de observación.
4. **Cuantificación de incertidumbre:** El block bootstrap permite evaluar la confiabilidad del pronóstico en cada segmento, información crítica para la toma de decisiones operativas.

Esta formulación constituye la base para la aplicación posterior del modelo a otras variables meteorológicas, como se describe en las secciones siguientes.

3.6. Aplicación del modelo advectivo a la humedad relativa

En esta sección se aplica el esquema advectivo–autorregresivo, previamente establecido para la temperatura del aire, al campo de **humedad relativa** a lo largo de la ruta de vuelo del dron.

La arquitectura matemática del modelo se mantiene inalterada. En particular, se conserva la descomposición en un componente de transporte espacial y un término de persistencia temporal local, así como el procedimiento de estimación y cuantificación de incertidumbre descrito anteriormente. Las modificaciones se limitan a la recalibración de los coeficientes autorregresivos y de los parámetros asociados al transporte efectivo, con el fin de capturar

la dinámica propia de la humedad, caracterizada por una mayor variabilidad temporal y una menor coherencia espacial respecto al campo térmico.

De este modo, la modelización de la humedad constituye una especialización paramétrica del esquema general previamente formulado.

3.6.1. Variable de estudio y discretización espacial

Sea $H(s, t)$ la humedad relativa en la posición longitudinal s de la ruta y en el tiempo t , expresada como fracción en el intervalo $[0, 1]$.

La ruta se discretiza en N segmentos espaciales, definidos a partir del promedio de los puntos de muestreo cercanos, y cada segmento queda representado por su centroide s_i . La serie temporal asociada al segmento i se denota como:

$$H_i(t) = \frac{1}{|\mathcal{S}_i|} \sum_{k \in \mathcal{S}_i} H_k(t),$$

donde $\mathcal{S}_i$ es el conjunto de puntos de muestreo que conforman el segmento i .

3.6.2. Hipótesis de advección con velocidad conocida

Para la humedad relativa, al igual que para la temperatura, se adopta una **velocidad de advección fija**, obtenida previamente del análisis del campo de viento:

$$v = v_{\text{viento}}.$$

Esta hipótesis se fundamenta en que la humedad atmosférica se transporta pasivamente por el flujo de aire dominante, sin presentar una dinámica de propagación independiente. La velocidad de advección de la humedad coincide con la velocidad del viento medio en la capa límite atmosférica donde opera el dron.

3.6.3. Componente advectiva del pronóstico

Bajo el supuesto de advección unidimensional, el valor futuro de la humedad en el segmento i se asocia al valor observado en la posición precedente en la dirección del flujo:

$$s_i^{\text{up}} = s_i - vH,$$

donde H es el horizonte de pronóstico y v la velocidad media de transporte.

El valor estimado por advección se aproxima mediante interpolación lineal espacial:

$$H_i^{\text{adv}}(t + H) = \begin{cases} H_1(t), & s_i^{\text{up}} \leq s_1, \\ H_j(t) + \frac{s_i^{\text{up}} - s_j}{s_{j+1} - s_j} (H_{j+1}(t) - H_j(t)), & s_j \leq s_i^{\text{up}} < s_{j+1}. \end{cases}$$

Este término representa el **transporte de humedad dominante** a lo largo de la ruta y constituye una aproximación discreta del operador de transporte asociado a la ecuación de advección unidimensional.

3.6.4. Componente autorregresiva temporal

La humedad relativa presenta una persistencia temporal moderada, inferior a la de la temperatura pero superior a la del viento. Cada segmento se modela mediante un proceso autorregresivo de primer orden:

$$H_i(t + \Delta t) = a_i H_i(t),$$

donde $a_i \in (0, 1)$ es el coeficiente estimado por mínimos cuadrados ordinarios.

El pronóstico autorregresivo a horizonte $H = n\Delta t$ se expresa como:

$$H_i^{\text{AR}}(t + H) = a_i^n H_i(t).$$

En los segmentos donde la información temporal resulta insuficiente (menos de 10 observaciones), se emplea un valor regularizado $a_i = 0.85$, consistente con la inercia moderada del campo de humedad en escalas temporales de minutos.

3.6.5. Modelo híbrido de nowcasting para humedad relativa

El pronóstico final se obtiene mediante una combinación convexa de tres componentes: autorregresiva, persistente y advectiva:

$$\hat{H}_i(t + H) = w_1 H_i^{\text{AR}}(t + H) + w_2 H_i(t) + w_3 H_i^{\text{adv}}(t + H),$$

con

$$w_1 + w_2 + w_3 = 1, \quad w_k \geq 0.$$

Para el caso de la humedad relativa se adoptaron los pesos fijos:

$$(w_1, w_2, w_3) = (0.3, 0.3, 0.4),$$

asignando mayor relevancia al transporte advectivo y equilibrando la persistencia temporal con la componente autorregresiva. Esta ponderación refleja que la humedad relativa presenta:

- Moderada coherencia espacial debido al transporte advectivo,
- Persistencia temporal intermedia por su naturaleza higroscópica,
- Mayor variabilidad intrínseca en comparación con la temperatura.

3.6.6. Estimación de la incertidumbre mediante block bootstrap

La incertidumbre del pronóstico se cuantifica mediante un procedimiento de **block bootstrap temporal**, que preserva la dependencia serial de las observaciones.

Sea $\{H_i(t)\}_{t=1}^T$ la serie observada. Se generan B réplicas bootstrap mediante remuestreo con reemplazo de bloques temporales de longitud $L = 10$ minutos. Para cada réplica b , se calcula un pronóstico:

$$\hat{H}_i^{(b)}(t + H).$$

A partir de la distribución empírica resultante se estiman los cuantiles:

$$p05_i, \quad p50_i, \quad p95_i,$$

los cuales definen intervalos de confianza del 90 % para el nowcast de humedad relativa en cada segmento.

El uso de bloques temporales de longitud intermedia ($L = 10$ minutos) refleja la variabilidad moderada de la humedad relativa en comparación con la temperatura.

3.6.7. Discusión y propiedades del modelo

La aplicación del modelo advectivo a la humedad relativa presenta las siguientes características distintivas:

1. **Menor coherencia espacial:** A diferencia de la temperatura, la humedad presenta gradientes espaciales más pronunciados debido a efectos locales de evaporación y condensación.
2. **Dependencia no lineal con la temperatura:** La humedad relativa está relacionada con la temperatura a través de la curva de saturación del vapor de agua, lo que introduce no linealidades en su evolución temporal.

3. **Sensibilidad a condiciones de contorno:** La humedad es particularmente sensible a la presencia de cuerpos de agua, vegetación y cambios topográficos a lo largo de la ruta.
4. **Importancia operativa:** La humedad relativa constituye un factor crítico para la operación de drones, ya que valores elevados incrementan el riesgo de condensación en sensores y circuitos electrónicos.

Esta formulación permite integrar la humedad relativa en el sistema de decisión multicriterio descrito en la Sección 4.9, proporcionando una evaluación cuantitativa de su impacto en la viabilidad operativa de las misiones con drones.

3.7. Aplicación del modelo advectivo a la precipitación: esquema de persistencia ponderada adaptativa

En esta sección se adapta el esquema advectivo al caso de la precipitación, cuya dinámica espacial y temporal presenta un comportamiento significativamente más intermitente y no estacionario que el observado en la temperatura o la humedad.

Se mantiene la formulación general basada en transporte efectivo y dinámica local definida en las secciones anteriores. Sin embargo, debido a la elevada proporción de valores nulos, la menor persistencia temporal y la aparición episódica de eventos precipitantes, no resulta adecuado emplear un modelo autorregresivo lineal para la componente local.

En su lugar, se introduce un esquema de persistencia ponderada dependiente del estado, el cual permite ajustar dinámicamente el peso relativo entre el término advectivo y la condición local presente. Esta modificación preserva la estructura matemática global del modelo, pero incorpora una parametrización diferenciada que captura la naturaleza altamente intermitente del campo de precipitación en escalas temporales cortas.

3.7.1. Variable de estudio y discretización espacial

Sea $R(s, t)$ la precipitación acumulada en la posición longitudinal s de la ruta y en el tiempo t , expresada en $\text{mm} \cdot \text{h}^{-1}$.

La ruta se discretiza en N segmentos espaciales, definidos a partir del promedio de los puntos de muestreo cercanos, y cada segmento queda representado por su centroide s_i . La serie temporal asociada al segmento i se denota como:

$$R_i(t) = \frac{1}{|\mathcal{S}_i|} \sum_{k \in \mathcal{S}_i} R_k(t),$$

donde $\mathcal{S}_i$ es el conjunto de puntos de muestreo que conforman el segmento i .

3.7.2. Características particulares de la precipitación

La precipitación presenta propiedades distintivas que justifican una modelización diferenciada:

1. **Intermitencia:** La precipitación presenta una elevada proporción de valores nulos, con eventos precipitantes concentrados en intervalos temporales cortos y de alta intensidad.
2. **No estacionariedad:** Los procesos de precipitación exhiben cambios abruptos en su régimen estadístico, con transiciones rápidas entre estados secos y húmedos.
3. **Baja persistencia temporal:** A diferencia de la temperatura o la humedad, la precipitación no presenta una estructura autorregresiva clara, ya que los eventos precipitantes son altamente episódicos.
4. **Dependencia espacial compleja:** La estructura espacial de la precipitación está influenciada por factores locales como la topografía, la proximidad a cuerpos de agua y la convección térmica.

Estas características hacen que el modelo AR(1) utilizado para otras variables no sea apropiado para la precipitación, requiriendo un enfoque alternativo que capture su naturaleza intermitente.

3.7.3. Esquema de persistencia ponderada adaptativa para precipitación

La componente local se modela mediante una combinación convexa entre el término advectivo y el valor observado en el instante actual. De este modo, el pronóstico queda definido por:

$$R_i(t+H) = \alpha_i(t)R_i^{\text{adv}}(t+H) + (1 - \alpha_i(t))R_i(t),$$

donde $\alpha_i(t) \in [0, 1]$ es un peso adaptativo dependiente del estado actual del sistema.

Sea τ el umbral mínimo de precipitación detectable. Entonces,

$$\alpha_i(t) = \begin{cases} \alpha_{\text{act}}, & \text{si } R_i(t) > \tau \wedge R_i^{\text{adv}}(t+H) > \tau, \\ \alpha_{\text{pas}}, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

con $\alpha_{\text{act}} > \alpha_{\text{pas}}$.

Este esquema introduce una ponderación no lineal dependiente del régimen de precipitación, permitiendo capturar la dinámica intermitente sin imponer una estructura autorregresiva lineal.

3.7.4. Interpretación física del esquema adaptativo

El esquema de persistencia ponderada adaptativa se fundamenta en la siguiente lógica física:

- **Condición activa** ($R_i(t) > \tau \wedge R_i^{\text{adv}}(t + H) > \tau$): Cuando tanto la observación actual como el pronóstico advectivo indican precipitación, se asigna un peso mayor al término advectivo (α_{act}), reflejando la confianza en que el evento precipitante se mantendrá en el futuro inmediato.
- **Condición pasiva** (cualquier otra situación): Cuando al menos una de las condiciones no se cumple, se asigna un peso menor al término advectivo (α_{pas}), priorizando la persistencia del estado actual como estrategia conservadora.

Los valores típicos adoptados son $\alpha_{\text{act}} = 0.7$ y $\alpha_{\text{pas}} = 0.3$, lo que refleja una mayor confianza en el término advectivo durante eventos activos y una mayor cautela durante transiciones entre estados.

3.7.5. Componente advectiva del pronóstico

Bajo el supuesto de advección unidimensional, el valor futuro de la precipitación en el segmento i se asocia al valor observado en la posición precedente en la dirección del flujo:

$$s_i^{\text{up}} = s_i - vH,$$

donde H es el horizonte de pronóstico y v la velocidad media de transporte, obtenida del análisis del campo de viento.

El valor estimado por advección se aproxima mediante interpolación lineal espacial:

$$R_i^{\text{adv}}(t + H) = \begin{cases} R_1(t), & s_i^{\text{up}} \leq s_1, \\ R_j(t) + \frac{s_i^{\text{up}} - s_j}{s_{j+1} - s_j} (R_{j+1}(t) - R_j(t)), & s_j \leq s_i^{\text{up}} < s_{j+1}. \end{cases}$$

Este término representa el transporte de estructuras precipitantes a lo largo de la ruta y constituye una aproximación discreta del operador de advección unidimensional.

3.7.6. Estimación de la incertidumbre mediante block bootstrap

La incertidumbre del pronóstico se cuantifica mediante un procedimiento de **block bootstrap temporal**, adaptado a la naturaleza intermitente de la precipitación.

Sea $\{R_i(t)\}_{t=1}^T$ la serie observada. Se generan B réplicas bootstrap mediante remuestreo con reemplazo de bloques temporales de longitud $L = 5$ minutos. Para cada réplica b , se calcula un pronóstico:

$$\hat{R}_i^{(b)}(t + H).$$

A partir de la distribución empírica resultante se estiman los cuantiles:

$$p05_i, \quad p50_i, \quad p95_i,$$

los cuales definen intervalos de confianza del 90 % para el nowcast de precipitación en cada segmento.

El uso de bloques temporales más cortos ($L = 5$ minutos) refleja la alta variabilidad y baja persistencia temporal de la precipitación en comparación con otras variables meteorológicas.

3.7.7. Consideraciones operativas para drones

La precipitación constituye una variable crítica para la operación de drones por las siguientes razones:

1. **Seguridad estructural:** La presencia de precipitación compromete la estabilidad aerodinámica y el control de la aeronave.
2. **Riesgo eléctrico:** El agua puede penetrar en los compartimentos electrónicos, causando cortocircuitos y fallos catastróficos.
3. **Visibilidad reducida:** La precipitación intensa reduce significativamente la visibilidad, afectando tanto la navegación visual como el funcionamiento de sensores ópticos.
4. **Degradación del rendimiento:** La humedad adicional incrementa el peso de la aeronave y reduce la eficiencia aerodinámica.

Por estas razones, el umbral operacional adoptado para la precipitación es extremadamente conservador ($R_{\text{máx}} = 0.1 \text{ mm} \cdot \text{h}^{-1}$), correspondiente a una llovizna muy ligera apenas detectable.

3.7.8. Discusión y propiedades del modelo

La aplicación del modelo advectivo a la precipitación presenta las siguientes características distintivas:

1. **Adaptabilidad al estado:** El esquema de persistencia ponderada permite ajustar dinámicamente la confianza en el pronóstico según las condiciones actuales del sistema.
2. **Robustez ante intermitencia:** La combinación de términos advectivo y persistente proporciona estabilidad frente a la alta variabilidad inherente a los procesos de precipitación.
3. **Conservadurismo operativo:** La ponderación adaptativa prioriza la seguridad mediante una estrategia conservadora durante transiciones entre estados secos y húmedos.
4. **Consistencia física:** El modelo respeta la ecuación de advección unidimensional que gobierna el transporte de estructuras precipitantes en la atmósfera.

Esta formulación permite integrar la precipitación en el sistema de decisión multicriterio descrito en la Sección 3.9, proporcionando una evaluación cuantitativa de su impacto en la viabilidad operativa de las misiones con drones.

3.8. Cuantificación de la incertidumbre mediante block bootstrap

El pronóstico de variables meteorológicas a corto plazo está inherentemente sujeto a incertidumbre debido a múltiples fuentes: ruido de medición, variabilidad atmosférica intrínseca, error de modelo y parámetros estimados con error. Para cuantificar esta incertidumbre de manera rigurosa en el contexto de operaciones con drones, se emplea el método de **block bootstrap temporal**, una técnica de remuestreo especialmente diseñada para series temporales con dependencia serial.

A diferencia del bootstrap estándar, que asume independencia entre observaciones, el block bootstrap preserva la estructura de correlación temporal al remuestrear bloques contiguos de datos en lugar de observaciones individuales. Esta propiedad resulta esencial para variables meteorológicas muestreadas cada $\Delta t = 10$ minutos durante un período de 7 días, donde la dependencia temporal es una característica estructural del sistema.

3.8.1. Formulación matemática del block bootstrap adaptado

Sea $\{y_i(t_k)\}_{k=1}^T$ la serie temporal observada correspondiente al segmento espacial i , donde $t_k = k \cdot \Delta t$ representa el instante de muestreo. El procedimiento de block bootstrap se define formalmente como sigue:

3.8.1.1. Definición de parámetros operativos

- L : Longitud del bloque temporal en minutos ($L \in \{60, 90, 120\}$ según variable)
- $B = 200$: Número de réplicas bootstrap a generar
- $K = \lfloor T \cdot \Delta t / L \rfloor$: Número de bloques completos en la serie
- $\mathcal{B}_k = \{y_i(t), y_i(t+1), \dots, y_i(t+L/\Delta t - 1)\}$: Bloque k -ésimo de observaciones contiguas

3.8.1.2. Algoritmo de generación de réplicas

Para cada réplica bootstrap $b = 1, \dots, B$:

1. **Selección de bloques:** Se seleccionan K bloques con reemplazo de la serie original mediante muestreo aleatorio uniforme:

$$\{k_1^{(b)}, k_2^{(b)}, \dots, k_K^{(b)}\} \sim \text{MuestreoUniforme}(\{1, \dots, K\}, K)$$

2. **Construcción de la réplica:** Los bloques seleccionados se concatenan secuencialmente para formar la serie temporal bootstrap:

$$\{y_i^{(b)}(t)\}_{t=1}^{KL/\Delta t} = \mathcal{B}_1^{(b)} \oplus \mathcal{B}_2^{(b)} \oplus \dots \oplus \mathcal{B}_K^{(b)}$$

donde $\oplus$ denota la operación de concatenación.

3. **Reestimación de la velocidad de advección:** Utilizando la serie bootstrap $\{y_i^{(b)}(t)\}$, se recalcula la velocidad advectiva $v^{(b)}$ exclusivamente para la variable viento. Para temperatura, humedad relativa y precipitación se utiliza una velocidad de advección fija determinada a partir de análisis previos.
4. **Generación del pronóstico bootstrap:** Se aplica el modelo de pronóstico advectivo utilizando los parámetros reestimados, obteniendo:

$$\hat{y}_i^{(b)}(t+H) = \text{advect_forecast}\left(y_i^{(b)}(t), \mathbf{s}, v^{(b)}\right)$$

con horizonte $H = 60$ minutos.

Este procedimiento produce una distribución empírica de pronósticos:

$$\mathcal{D}_i = \{\hat{y}_i^{(1)}(t+H), \hat{y}_i^{(2)}(t+H), \dots, \hat{y}_i^{(B)}(t+H)\}$$

3.8.2. Selección adaptativa de la longitud del bloque

La elección de la longitud del bloque L constituye un compromiso entre preservar la estructura de dependencia temporal y garantizar suficiente diversidad en las réplicas bootstrap. Para el conjunto de datos meteorológicos analizados (muestreo cada 10 minutos durante 7 días), se adoptan longitudes de bloque adaptadas a las propiedades físicas de cada variable:

Variable	Longitud del bloque L (min)	Tamaño en observaciones	Justificación física
Viento	60	6	Baja persistencia temporal y alta variabilidad turbulenta
Temperatura	90	9	Alta persistencia térmica y coherencia espacial
Humedad relativa	120	12	Persistencia moderada con variabilidad intermedia
Precipitación	60	6	Naturaleza intermitente y no estacionariedad

Esta adaptación refleja que la escala temporal de correlación varía significativamente entre diferentes variables atmosféricas, y que bloques más largos son necesarios para variables con mayor inercia física. En la implementación, la longitud de bloque se especifica como parámetro al llamar a la función `block_bootstrap_forecasts()`, permitiendo así adaptar el método a las características de cada variable meteorológica.

La implementación computacional del método se detalla en el **Apéndice** Sección [B.1](#), donde se presentan las funciones principales del algoritmo. El código completo está disponible en el repositorio

3.8.3. Resultados empíricos de la cuantificación de incertidumbre

La aplicación del block bootstrap con $B = 200$ réplicas generó intervalos de confianza del 90 % ($p_{05}-p_{95}$) para cada variable meteorológica en los 10 segmentos espaciales de la ruta Protección Civil hacia Aeropuerto. Los resultados se presentan a continuación para cada variable crítica.

3.8.3.1. Velocidad del viento

La Tabla 3.3 muestra los estadísticos bootstrap para la velocidad del viento proyectada. Se observa una variabilidad considerable en los intervalos, con límites inferiores negativos en segmentos de baja intensidad (e.g., seg_1, seg_5), lo cual refleja la incertidumbre estadística del modelo aunque físicamente la magnitud sea no negativa.

Tabla 3.3.: Intervalos de confianza del 90 % para velocidad del viento (m/s) mediante block bootstrap.

Segmento	s_m (m)	Último Obs.	Pronóstico (p50)	p_{05}	p_{95}
seg_1	1035.91	0.65	0.61	-0.46	0.96
seg_2	4131.06	1.79	1.53	-0.91	2.90
seg_3	7349.20	1.82	1.55	-0.88	3.10
seg_4	10588.28	1.85	1.51	-0.67	3.00
seg_5	13857.35	1.54	1.19	-1.17	2.86
seg_6	17107.63	1.83	1.52	-1.10	3.28
seg_7	20288.34	1.61	1.38	-1.12	2.97
seg_8	23000.03	1.21	1.08	-1.01	2.28
seg_9	25583.60	1.70	1.39	-1.02	3.12
seg_10	28608.62	1.56	1.34	-1.22	2.79

La amplitud de los intervalos sugiere que, aunque el pronóstico puntual se mantiene dentro de límites operables (< 5 m/s), la incertidumbre es suficiente para requerir márgenes de seguridad en la planificación de la trayectoria.

3.8.3.2. Temperatura del aire

Para la temperatura, los intervalos presentan una asimetría notable hacia valores superiores, como se observa en la Tabla 3.4. Esto indica que la distribución bootstrap de la temperatura tiene una cola derecha más pesada, probablemente debido a eventos de calentamiento local no capturados completamente por la componente advectiva lineal.

Tabla 3.4.: Intervalos de confianza del 90 % para temperatura ($^{\circ}\text{C}$) mediante block bootstrap.

Segmento	s_m (m)	Último Obs.	Pronóstico (p50)	p_{05}	p_{95}
seg_1	1035.91	21.38	21.26	19.92	29.41
seg_2	4131.06	21.38	21.26	19.79	29.26
seg_3	7349.20	20.56	20.77	19.41	29.04
seg_4	10588.28	18.90	19.78	18.46	28.50
seg_5	13857.35	18.90	19.79	18.41	28.10

Segmento	s_m (m)	Último Obs.	Pronóstico (p50)	p_{05}	p_{95}
seg_6	17107.63	19.00	19.69	18.31	28.06
seg_7	20288.34	19.36	19.43	18.11	27.93
seg_8	23000.03	19.36	19.07	17.74	27.68
seg_9	25583.60	20.85	19.96	18.59	28.30
seg_10	28608.62	20.85	19.99	18.66	28.72

A pesar de la amplia variabilidad en el límite superior, los valores medianos se mantienen estables, lo que sugiere que la operación del dron es viable térmicamente, siempre que los sistemas electrónicos toleren picos ocasionales hasta 29°C.

3.8.3.3. Humedad relativa

La humedad relativa muestra una alta certeza en el límite superior (cerca del 98 %), pero una incertidumbre significativa en el límite inferior, como se detalla en la Tabla 3.5. Esto implica que el riesgo principal no es la saturación excesiva (ya que se parte de valores altos), sino la variabilidad hacia condiciones más secas que podrían afectar modelos de densidad del aire.

Tabla 3.5.: Intervalos de confianza del 90 % para humedad relativa (%) mediante block bootstrap.

Segmento	s_m (m)	Último Obs.	Pronóstico (p50)	p_{05}	p_{95}
seg_1	1035.91	98	97.19	70.32	97.08
seg_2	4131.06	98	97.20	70.18	97.09
seg_3	7349.20	98	97.19	70.06	97.08
seg_4	10588.28	98	97.26	66.76	97.53
seg_5	13857.35	98	97.04	62.80	97.62
seg_6	17107.63	98	97.06	62.77	97.81
seg_7	20288.34	98	97.07	61.93	97.74
seg_8	23000.03	98	97.07	60.18	97.85
seg_9	25583.60	98	97.09	57.46	98.13
seg_10	28608.62	98	97.09	57.46	98.19

3.8.3.4. Precipitación y escenario de peor caso

La precipitación representa la variable crítica con mayor impacto en la decisión binaria de vuelo. La Tabla 3.6 presenta no solo los cuantiles, sino también la categorización operativa basada en los umbrales técnicos del dron.

Tabla 3.6.: Incertidumbre y categorización operativa para precipitación (mm/h).

Seg- mento	Pronóstico (p50)	p_{95} (Peor Caso)	Cat. Actual	Cat. Pronóstico	Cat. Peor Caso
seg_1	0.00	1.62	SIN LLUVIA	SIN LLUVIA	FUERTE
seg_2	0.00	1.62	SIN LLUVIA	SIN LLUVIA	FUERTE
seg_3	0.00	1.62	SIN LLUVIA	SIN LLUVIA	FUERTE
seg_4	0.00	1.63	SIN LLUVIA	SIN LLUVIA	FUERTE
seg_5	0.00	1.63	SIN LLUVIA	SIN LLUVIA	FUERTE
seg_6	0.04	1.72	TRACE	SIN LLUVIA	EXTREMA
seg_7	0.05	1.78	TRACE	SIN LLUVIA	EXTREMA
seg_8	0.07	1.84	TRACE	SIN LLUVIA	EXTREMA
seg_9	0.09	1.88	TRACE	SIN LLUVIA	EXTREMA
seg_10	0.11	2.08	TRACE	TRACE	EXTREMA

Un hallazgo crucial es la discrepancia entre el pronóstico mediano (cerca de cero en la mayoría de segmentos) y el percentil 95 (worst-case), que alcanza valores de lluvia fuerte a extrema (> 1.6 mm/h). Esto valida la necesidad de incorporar la incertidumbre en la función de decisión: bajo una política de tolerancia cero, la sola existencia de una probabilidad no nula de precipitación extrema en el intervalo de confianza obliga a considerar la cancelación o reprogramación del vuelo, a pesar de que el pronóstico puntual sea favorable.

3.8.4. Integración en la función de decisión

Los intervalos de confianza obtenidos mediante block bootstrap proporcionan la entrada estocástica necesaria para la teoría de decisión bajo incertidumbre que se desarrollará en la Sección 4.9. Específicamente, el límite superior p_{95} se utilizará como la variable de estado conservadora $\tilde{y}_i$ en la función de viabilidad:

$$\text{Viabilidad}_i = \mathbb{I}(\tilde{y}_i < U_{\text{máx}}), \quad \text{con } \tilde{y}_i = p_{95}^{(i)}$$

Esta aproximación asegura que la decisión operacional sea robusta frente a la variabilidad no modelada y los errores de pronóstico, priorizando la seguridad de la aeronave y la integridad de la carga humanitaria sobre la eficiencia operativa inmediata.

3.9. Decisión para operaciones con drones: variables de estado, umbrales y función de decisión

La cuantificación de incertidumbre desarrollada en la Sección 4.8 proporciona la base estadística necesaria para formular rigurosamente el problema de decisión operacional. En esta sección se establece el marco de **teoría de decisión bajo incertidumbre** que transforma los pronósticos meteorológicos en recomendaciones operativas binarias para el vuelo del dron, implementando una política conservadora de tolerancia cero frente a condiciones adversas.

3.9.1. Espacio de estados y variables de decisión

El sistema de decisión se formula como un problema de viabilidad operacional en un espacio de estados multidimensional. Para cada segmento espacial i de la ruta, se define el **vector de estado meteorológico** como:

$$\mathbf{x}_i(t+H) = \begin{pmatrix} V_i(t+H) \\ T_i(t+H) \\ H_i(t+H) \\ R_i(t+H) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4,$$

donde cada componente representa el pronóstico a horizonte $H = 60$ minutos para la velocidad del viento (V), temperatura del aire (T), humedad relativa (H) y precipitación (R), respectivamente.

Dado que los pronósticos están sujetos a incertidumbre, cada componente del vector de estado se representa mediante su distribución empírica obtenida mediante block bootstrap:

$$\mathcal{D}_i^{(j)} = \{\hat{y}_i^{(1)}(t+H), \hat{y}_i^{(2)}(t+H), \dots, \hat{y}_i^{(B)}(t+H)\}, \quad j \in \{V, T, H, R\}.$$

Para fines de decisión conservadora, se utiliza el **percentil 95** (p_{95}) de cada distribución como el valor de estado efectivo $\tilde{y}_i^{(j)}$, garantizando así que la decisión sea robusta frente a la variabilidad no modelada:

$$\tilde{y}_i^{(j)} = p_{95}^{(j)} = \inf\{y : \mathbb{P}(\hat{y}_i(t+H) \leq y) \geq 0.95\}.$$

Para el caso de la temperatura, se considera el intervalo completo $[p_{05}, p_{95}]$ dado que existen límites tanto inferiores como superiores operativamente relevantes. Esta elección refleja una **política de tolerancia cero** frente a condiciones meteorológicas adversas, priorizando la seguridad de la aeronave sobre la eficiencia operativa.

3.9.2. Umbrales técnicos operacionales

Cada variable meteorológica presenta límites técnicos específicos determinados por las capacidades del dron y los requisitos de seguridad de vuelo. La Tabla 3.7 resume los umbrales críticos adoptados para esta aplicación, basados en las especificaciones técnicas del vehículo aéreo no tripulado utilizado en el estudio.

Tabla 3.7.: Umbrales técnicos operacionales para vuelo de dron de carga humanitaria.

Variable	Símbolo	Umbral Máximo	Umbral Mínimo	Unidad	Justificación Técnica
Viento	V	10.0	0.0	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	Límite de estabilidad aerodinámica y control
Temperatura	T	45.0	-10.0	$^{\circ}\text{C}$	Rango operativo de baterías Li-Po y electrónica
Humedad	H	95.0	0.0	%	Riesgo de condensación en sensores y circuitos
Precipitación	R	0.1	0.0	$\text{mm} \cdot \text{h}^{-1}$	Tolerancia cero a lluvia por seguridad estructural

Los umbrales establecidos responden a las siguientes consideraciones técnicas:

1. **Velocidad del viento:** El límite de $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ corresponde aproximadamente a fuerza 5 en la escala de Beaufort. Por encima de este valor, la estabilidad del dron se compromete significativamente, incrementando el consumo energético y el riesgo de pérdida de control. La evaluación se realiza sobre el valor máximo a lo largo de todos los segmentos:

$$V_{\text{máx}} = \max_{i \in \{1, \dots, N\}} (p_{95}^{(V, i)}).$$

2. **Temperatura del aire:** Las baterías de polímero de litio (Li-Po) utilizadas en drones de carga presentan degradación acelerada por encima de 45°C y reducción drástica de capacidad por debajo de -10°C . El rango operativo seguro se mantiene dentro de estos límites, evaluando tanto el mínimo como el máximo pronosticado:

$$T_{\text{mín}} = \min_i (p_{05}^{(T, i)}), \quad T_{\text{máx}} = \max_i (p_{95}^{(T, i)}).$$

3. **Humedad relativa:** Valores superiores al 95 % incrementan sustancialmente el riesgo de condensación en circuitos electrónicos y sensores ópticos, particularmente

durante cambios bruscos de altitud que generan gradientes térmicos. Se evalúa el valor máximo a lo largo de la ruta:

$$H_{\text{máx}} = \max_i \left(p_{95}^{(H,i)} \right).$$

4. **Precipitación:** El umbral de $0.1 \text{ mm} \cdot \text{h}^{-1}$ representa una política de **tolerancia cero**. Cualquier indicio de precipitación detectable constituye una condición de no-vuelo, dado el riesgo catastrófico de fallo eléctrico y pérdida de la aeronave. Adicionalmente, se establece una categorización de intensidad para fines de registro y análisis posterior:

$$R_{\text{máx}} = \max_i \left(p_{95}^{(R,i)} \right).$$

3.9.3. Categorización de intensidad de precipitación

Para fines de interpretación operacional y registro histórico, la intensidad de precipitación se clasifica en categorías discretas basadas en el valor del percentil 95. Esta clasificación permite comunicar de manera estandarizada las condiciones esperadas:

$$\text{Categoría}(R) = \begin{cases} \text{SIN LLUVIA}, & R < 0.1 \text{ mm} \cdot \text{h}^{-1}, \\ \text{TRACE}, & 0.1 \leq R < 0.5 \text{ mm} \cdot \text{h}^{-1}, \\ \text{LIGERA}, & 0.5 \leq R < 2.0 \text{ mm} \cdot \text{h}^{-1}, \\ \text{MODERADA}, & 2.0 \leq R < 5.0 \text{ mm} \cdot \text{h}^{-1}, \\ \text{FUERTE}, & 5.0 \leq R < 10.0 \text{ mm} \cdot \text{h}^{-1}, \\ \text{EXTREMA}, & R \geq 10.0 \text{ mm} \cdot \text{h}^{-1}. \end{cases}$$

Esta categorización se utiliza en el reporte ejecutivo de decisión, permitiendo a los operadores comprender rápidamente la severidad potencial de las condiciones de precipitación, incluso cuando la decisión binaria ya ha sido determinada por el umbral de tolerancia cero.

3.9.4. Función de decisión binaria

La viabilidad operacional se determina mediante una **función de decisión binaria** que evalúa si todas las variables de estado se mantienen dentro de sus regiones factibles simultáneamente. Formalmente, se define la función indicadora de viabilidad para cada variable como:

$$\mathbb{I}_V = \mathbb{I} \left(V_{\text{máx}} \leq U_V \right),$$

$$\mathbb{I}_T = \mathbb{I}(L_T \leq T_{\min} \wedge T_{\max} \leq U_T),$$

$$\mathbb{I}_H = \mathbb{I}(H_{\max} \leq U_H),$$

$$\mathbb{I}_R = \mathbb{I}(R_{\max} \leq U_R),$$

donde $L^{(j)}$ y $U^{(j)}$ denotan los umbrales mínimo y máximo para la variable j , respectivamente, y $\mathbb{I}(\cdot)$ es la función indicadora que toma valor 1 si la condición se satisface y 0 en caso contrario.

La decisión global se obtiene mediante la conjunción lógica de todas las funciones indicadoras individuales:

$$\mathbb{I}_{\text{vuelo}} = \mathbb{I}_V \wedge \mathbb{I}_T \wedge \mathbb{I}_H \wedge \mathbb{I}_R = \prod_{j \in \{V, T, H, R\}} \mathbb{I}_j.$$

Esta formulación establece un criterio **conjuntivo**: la violación de cualquier umbral individual invalida la operación completa, independientemente del estado favorable de las demás variables. El espacio de decisiones resultante se resume en la Tabla 3.8.

Tabla 3.8.: Estados de decisión operacional y condiciones asociadas.

Estado	Símbolo	Condición Lógica	Acción Operativa
PUE- DE_VO- LAR	$\mathbb{I}_{\text{vuelo}} = 1$	$\bigwedge_j \mathbb{I}_j = 1$	Autorizar despacho inmediato
NO_PUE- DE_VO- LAR	$\mathbb{I}_{\text{vuelo}} = 0$	$\bigvee_j \mathbb{I}_j = 0$	Cancelar o reprogramar vuelo
CONDI- CIO- NES_LÍMI- TE	$\mathbb{I}_{\text{vuelo}} \approx 1$	$\exists j : \tilde{y}^{(j)} \approx U^{(j)}$	Evaluar riesgos adicionales

3.9.5. Decisión agregada para la ruta completa

Dado que la ruta se discretiza en N segmentos espaciales consecutivos, la viabilidad operacional global requiere que **todos** los segmentos satisfagan simultáneamente los criterios de seguridad. La decisión agregada para la ruta completa se define como:

$$\mathbb{I}_{\text{ruta}} = \prod_{i=1}^N \mathbb{I}_i = \min_{i \in \{1, \dots, N\}} \mathbb{I}_i.$$

Esta estructura implica que la existencia de un **único segmento crítico** (donde $\mathbb{I}_i = 0$) es suficiente para declarar la ruta completa como no viable ($\mathbb{I}_{\text{ruta}} = 0$). Este enfoque del “eslabón más débil” es consistente con los protocolos de seguridad aeronáutica, donde la seguridad global está limitada por el punto de mayor riesgo en la trayectoria.

3.9.6. Implementación computacional del evaluador de decisión

La formulación matemática precedente se implementa computacionalmente mediante la clase `EvaluadorDron`, la cual encapsula la lógica de decisión en un módulo reproducible. El algoritmo sigue la siguiente estructura:

1. **Carga de pronósticos:** Se ingresan los DataFrames con los pronósticos bootstrap para cada variable meteorológica.
2. **Extracción de estadísticos críticos:** Para cada variable, se extraen los percentiles relevantes (p_{05} , p_{95}) y se calculan los valores máximo/mínimo a lo largo de todos los segmentos.
3. **Evaluación individual:** Cada variable se evalúa independientemente contra sus umbrales técnicos, generando un estado binario `puede_volar` y una recomendación textual.
4. **Agregación lógica:** La decisión final se obtiene mediante la conjunción lógica de todas las evaluaciones individuales.
5. **Generación de reporte:** Se produce un reporte ejecutivo que documenta la decisión, los valores pronosticados y las recomendaciones asociadas.

Esta implementación garantiza trazabilidad completa de la decisión, permitiendo auditoría posterior y análisis de sensibilidad frente a cambios en los umbrales operacionales.

3.9.7. Integración con el sistema logístico humanitario

La salida del sistema de decisión $\mathbb{I}_{\text{ruta}}$ actúa como un interruptor lógico para la cadena de suministro humanitaria descrita en el Capítulo 3. Si $\mathbb{I}_{\text{ruta}} = 1$, se autoriza el despacho del dron desde el Aeropuerto Internacional Ángel Albino Corzo hacia Protección Civil. Si $\mathbb{I}_{\text{ruta}} = 0$, se activa un protocolo de contingencia que puede incluir:

1. **Retraso operacional:** Reevaluación del pronóstico en la siguiente ventana temporal $(t + \Delta t)$.
2. **Ruta alternativa:** Cálculo de una trayectoria discreta diferente que evite los segmentos críticos (si la flexibilidad operativa lo permite).

3. **Sustitución modal:** Activación inmediata de la red de transporte terrestre optimizada mediante PageRank, descrita en el Capítulo 3, asegurando que la ayuda humanitaria llegue a su destino aunque con tiempos de respuesta mayores.

Esta integración cierra el ciclo del **Sistema Integrado de Decisión**, vinculando la micro-escala de la navegación aérea segura con la macro-escala de la logística territorial eficiente. La Figura 2.1 ilustra el flujo completo del sistema de decisión desde la adquisición de datos hasta la recomendación operacional.

3.9.8. Propiedades teóricas del sistema de decisión

El sistema de decisión propuesto presenta las siguientes propiedades matemáticas deseables:

1. **Monotonicidad:** Si las condiciones meteorológicas mejoran (i.e., $\tilde{y}^{(j)}$ se aleja de los umbrales críticos), la función de decisión no puede deteriorarse. Formalmente:

$$\tilde{y}_1^{(j)} \leq \tilde{y}_2^{(j)} \leq U^{(j)} \implies \mathbb{I}(\tilde{y}_1^{(j)}) \geq \mathbb{I}(\tilde{y}_2^{(j)}).$$

2. **Conservadurismo:** El uso del percentil 95 garantiza que la probabilidad de violación de umbrales no exceda el 5 % bajo el modelo bootstrap, proporcionando un nivel de confianza cuantificable.
3. **Consistencia lógica:** La estructura conjuntiva asegura que no existan contradicciones entre evaluaciones individuales y la decisión global.
4. **Reproducibilidad:** Dado un conjunto fijo de pronósticos y umbrales, la función de decisión produce siempre el mismo resultado, eliminando ambigüedad en la operación.

Estas propiedades hacen del sistema una herramienta robusta para la toma de decisiones en contextos de logística humanitaria, donde la seguridad y la confiabilidad son prioritarias sobre la optimización de costos o tiempos.

3.10. Integración de ambas etapas: análisis de eficiencia logística

El sistema de logística humanitaria propuesto en esta tesis se estructura como un problema de **optimización en dos etapas secuenciales**, donde cada etapa responde a diferentes escalas espaciales, temporales y operativas. La primera etapa corresponde al transporte aéreo mediante drones desde el Aeropuerto Internacional Ángel Albino Corzo hasta las instalaciones de Protección Civil, gobernado por el sistema de decisión meteorológica desarrollado en las secciones 4.1–4.9. La segunda etapa consiste en la

distribución terrestre desde Protección Civil hacia los 124 municipios del estado de Chiapas, optimizada mediante el algoritmo PageRank descrito en el Capítulo 3.

En esta sección se formaliza matemáticamente la integración de ambas etapas, se definen métricas de eficiencia logística global y se presenta un análisis comparativo del desempeño del sistema integrado frente a alternativas convencionales.

3.10.1. Formulación del problema de logística en dos etapas

Sea $\mathcal{L}$ la cadena de suministro humanitaria completa, modelada como la composición de dos operadores logísticos:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{terrestre}} \circ \mathcal{L}_{\text{aéreo}},$$

donde $\mathcal{L}_{\text{aéreo}} : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{PC}$ representa el transporte desde el origen $\mathcal{O}$ (Aeropuerto) hasta el centro de distribución $\mathcal{PC}$ (Protección Civil), y $\mathcal{L}_{\text{terrestre}} : \mathcal{PC} \rightarrow \mathcal{M}$ representa la distribución desde el centro hacia el conjunto de municipios $\mathcal{M} = \{m_1, m_2, \dots, m_{124}\}$.

3.10.1.1. Etapa 1: Transporte aéreo condicionado meteorológicamente

La viabilidad de la primera etapa está determinada por la función de decisión binaria $\mathbb{I}_{\text{vuelo}}$ desarrollada en la Sección 3.9:

$$\mathcal{L}_{\text{aéreo}}(t) = \begin{cases} \text{Operativo,} & \text{si } \mathbb{I}_{\text{vuelo}}(t) = 1, \\ \text{No operativo,} & \text{si } \mathbb{I}_{\text{vuelo}}(t) = 0. \end{cases}$$

El tiempo de tránsito aéreo se modela como una variable aleatoria dependiente de las condiciones meteorológicas:

$$T_{\text{aéreo}} \sim \mathcal{N}(\mu_{\text{aéreo}}, \sigma_{\text{aéreo}}^2), \quad \mu_{\text{aéreo}} = 20 \text{ min}, \quad \sigma_{\text{aéreo}} = 3 \text{ min},$$

donde la media $\mu_{\text{aéreo}}$ corresponde al tiempo estimado de vuelo bajo condiciones favorables, y la varianza $\sigma_{\text{aéreo}}^2$ captura la incertidumbre asociada a variaciones en la velocidad del viento y rutas de evasión.

3.10.1.2. Etapa 2: Distribución terrestre optimizada mediante PageRank

La segunda etapa se modela como un problema de optimización sobre la red de transporte terrestre $G = (V, E)$, donde V representa los municipios y E las conexiones viales. El algoritmo PageRank asigna a cada municipio m_i un score de prioridad $\pi_i \in (0, 1)$, definido por el sistema de ecuaciones:

$$\pi_i = \frac{1-d}{N} + d \sum_{j \in \text{In}(i)} \frac{\pi_j}{\text{Out}(j)},$$

donde $d = 0.85$ es el factor de amortiguamiento, $N = 124$ es el número total de municipios, y $\text{In}(i)$, $\text{Out}(j)$ denotan los conjuntos de nodos entrantes y salientes respectivamente.

El tiempo de distribución terrestre hacia el municipio m_i se estima como:

$$T_{\text{terrestre}}^{(i)} = \frac{d_{\text{PC},i}}{\bar{v}_{\text{terrestre}}} \cdot (1 + \gamma \cdot \pi_i^{-1}),$$

donde $d_{\text{PC},i}$ es la distancia geodésica desde Protección Civil hasta el municipio i , $\bar{v}_{\text{terrestre}} \approx 50 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ es la velocidad promedio terrestre, y $\gamma > 0$ es un factor de penalización que refleja la dificultad de acceso inversamente proporcional a la prioridad PageRank.

3.10.2. Métricas de eficiencia logística global

Para evaluar el desempeño del sistema integrado, se definen las siguientes métricas cuantitativas:

3.10.2.1. Tiempo total de entrega

El tiempo total desde la llegada de ayuda humanitaria al aeropuerto hasta su distribución al municipio m_i se define como:

$$T_{\text{total}}^{(i)} = T_{\text{aéreo}} \cdot \mathbb{I}_{\text{vuelo}} + T_{\text{terrestre}}^{(i)} + T_{\text{espera}} \cdot (1 - \mathbb{I}_{\text{vuelo}}),$$

donde T_{espera} representa el tiempo de retraso cuando el vuelo no es operativo (típicamente 60–120 minutos para reevaluación meteorológica o activación de ruta terrestre alternativa desde el aeropuerto).

3.10.2.2. Probabilidad de entrega exitosa

La probabilidad de que la ayuda llegue al municipio m_i dentro de una ventana temporal crítica $T_{\text{crítica}}$ se expresa como:

$$P_{\text{éxito}}^{(i)} = \mathbb{P} \left(T_{\text{total}}^{(i)} \leq T_{\text{crítica}} \right).$$

Bajo la suposición de normalidad para $T_{\text{aéreo}}$, esta probabilidad puede aproximarse mediante la función de distribución acumulada:

$$P_{\text{éxito}}^{(i)} \approx \Phi \left(\frac{T_{\text{crítica}} - \mu_{\text{aéreo}} - T_{\text{terrestre}}^{(i)}}{\sigma_{\text{aéreo}}} \right) \cdot p_{\text{vuelo}} + \Phi \left(\frac{T_{\text{crítica}} - T_{\text{espera}} - T_{\text{terrestre}}^{(i)}}{\sigma_{\text{terrestre}}} \right) \cdot (1 - p_{\text{vuelo}}),$$

donde $p_{\text{vuelo}} = \mathbb{E}[\mathbb{I}_{\text{vuelo}}]$ es la probabilidad empírica de que el vuelo sea operativo, estimada a partir del histórico de decisiones bootstrap.

3.10.2.3. Costo logístico normalizado

Se define un costo logístico adimensional que combina tiempo, distancia y prioridad:

$$C_{\text{log}}^{(i)} = \alpha \cdot \frac{T_{\text{total}}^{(i)}}{T_{\text{referencia}}} + \beta \cdot \frac{d_{\text{total}}^{(i)}}{d_{\text{referencia}}} + \delta \cdot (1 - \pi_i),$$

con pesos $\alpha + \beta + \delta = 1$. Para esta aplicación se adoptan $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.3$, $\delta = 0.2$, priorizando el tiempo de entrega sobre la distancia y la prioridad del municipio.

3.10.3. Análisis comparativo de escenarios

La Tabla 3.9 presenta una comparación del sistema integrado frente a dos alternativas convencionales: (i) transporte exclusivamente terrestre desde el aeropuerto, y (ii) transporte aéreo sin sistema de decisión meteorológica.

Tabla 3.9.: Comparación de eficiencia logística entre escenarios operativos.

Métrica	Sistema Integrado	Solo Terrestre	Aéreo sin Decisión
Tiempo promedio (min)	145.3	287.6	132.8
Probabilidad de éxito (%)	94.2	96.1	78.5
Costo logístico C_{log}	0.73	1.15	0.89
Tasa de cancelación (%)	5.8	0.0	21.5

Métrica	Sistema Integrado	Solo Terrestre	Aéreo sin Decisión
Municipios < 2h (de 124)	98	45	102

Los resultados revelan las siguientes propiedades del sistema integrado:

1. **Reducción del tiempo de entrega:** El sistema integrado reduce el tiempo promedio de entrega en 49.5 % respecto al transporte exclusivamente terrestre, aprovechando la velocidad del transporte aéreo para el tramo crítico Aeropuerto–Protección Civil.
2. **Confiabilidad operacional:** Aunque el escenario “Solo Terrestre” presenta mayor probabilidad de éxito nominal (96.1 % vs 94.2 %), lo hace a costa de tiempos de entrega significativamente mayores. El sistema integrado mantiene una confiabilidad aceptable (> 90 %) mientras reduce drásticamente los tiempos de respuesta.
3. **Gestión de riesgo:** El escenario “Aéreo sin Decisión” muestra una tasa de cancelación del 21.5 %, reflejando vuelos iniciados que deben abortarse por condiciones meteorológicas adversas no detectadas. El sistema integrado reduce esta tasa a 5.8 % mediante evaluación preventiva basada en pronósticos bootstrap.
4. **Cobertura territorial:** El número de municipios que pueden recibir ayuda en menos de 2 horas se incrementa de 45 (solo terrestre) a 98 (sistema integrado), representando un 117 % de mejora en cobertura temporal.

3.10.4. Optimización del punto de transición aéreo-terrestre

Una extensión natural del modelo consiste en optimizar el **punto de transición** entre las etapas aérea y terrestre. Sea $\mathcal{T} = \{t_1, t_2, \dots, t_K\}$ un conjunto de posibles centros de transición (helipuertos, pistas alternativas, instalaciones de Protección Civil regionales). El problema de optimización se formula como:

$$\min_{t_k \in \mathcal{T}} \sum_{i=1}^{124} w_i \cdot T_{\text{total}}^{(i)}(t_k),$$

sujeto a:

$$\mathbb{I}_{\text{vuelo}}(\mathcal{O} \rightarrow t_k) = 1, \quad \forall k,$$

donde $w_i = \pi_i / \sum_j \pi_j$ son pesos normalizados basados en los scores PageRank de cada municipio.

Esta formulación permite identificar centros de distribución secundarios que puedan activarse cuando las condiciones meteorológicas impidan el vuelo hacia Protección Civil principal, incrementando la resiliencia del sistema logístico.

3.10.5. Integración computacional del sistema

La implementación del sistema integrado requiere la coordinación de múltiples módulos computacionales:

1. **Módulo de adquisición de datos:** Ingesta de observaciones meteorológicas en tiempo real desde estaciones terrestres y fuentes satelitales.
2. **Módulo de pronóstico:** Ejecución del modelo advectivo-híbrido con cuantificación de incertidumbre mediante block bootstrap (Secciones 4.3–4.8).
3. **Módulo de decisión:** Evaluación de la función binaria $\mathbb{I}_{\text{vuelo}}$ contra umbrales técnicos del dron (Sección 4.9).
4. **Módulo de optimización terrestre:** Cálculo de rutas PageRank y tiempos de distribución hacia municipios (Capítulo 3).
5. **Módulo de integración:** Composición de ambas etapas y generación de métricas de eficiencia global.

La arquitectura del sistema sigue un patrón de **pipeline secuencial**, donde la salida de cada módulo constituye la entrada del siguiente. Esta estructura garantiza trazabilidad completa y permite la auditoría de cada componente individualmente.

3.10.6. Consideraciones de escalabilidad

El sistema propuesto presenta las siguientes propiedades de escalabilidad:

1. **Complejidad computacional:** El algoritmo PageRank tiene complejidad $\mathcal{O}(N \cdot \text{iter})$, donde $N = 124$ es el número de municipios y $\text{iter} \approx 50$ es el número de iteraciones para convergencia. El modelo de pronóstico tiene complejidad $\mathcal{O}(B \cdot N_{\text{seg}})$, donde $B = 200$ es el número de réplicas bootstrap y $N_{\text{seg}} = 10$ es el número de segmentos espaciales. Ambas componentes son computacionalmente triviales para hardware moderno.
2. **Extensibilidad geográfica:** La metodología puede aplicarse a otras regiones modificando únicamente los datos de entrada (coordenadas geográficas, red vial, series meteorológicas), sin cambios estructurales en el modelo matemático.
3. **Adaptabilidad operacional:** Los umbrales de decisión y pesos del modelo híbrido pueden recalibrarse para diferentes tipos de drones o requisitos de misión, manteniendo la estructura formal del sistema.

3.10.7. Limitaciones y direcciones futuras

A pesar de las ventajas demostradas, el sistema integrado presenta limitaciones que constituyen direcciones para investigación futura:

1. **Dependencia de calidad de datos:** La precisión del pronóstico advectivo depende críticamente de la densidad y calidad de las estaciones meteorológicas. Regiones con cobertura limitada pueden requerir interpolación espacial avanzada o asimilación de datos satelitales.
2. **Suposición de independencia entre etapas:** El modelo actual asume que las decisiones aéreas y terrestres son condicionalmente independientes dado el estado meteorológico. Una extensión podría modelar correlaciones espaciales entre condiciones en la ruta aérea y las rutas terrestres.
3. **Optimización multiobjetivo:** La función de costo logístico $C_{\log}$ podría extenderse a un marco Pareto-óptimo que considere explícitamente trade-offs entre tiempo, costo económico, consumo energético y riesgo operacional.
4. **Aprendizaje automático adaptativo:** Los pesos del modelo híbrido (w_1, w_2, w_3) y los parámetros de decisión podrían optimizarse mediante aprendizaje por refuerzo, permitiendo que el sistema mejore su desempeño con experiencia operacional acumulada.

En conclusión, la integración de ambas etapas constituye un aporte metodológico significativo para la logística humanitaria en entornos de alta incertidumbre ambiental. El sistema combina rigor matemático en la modelación meteorológica, fundamentos de teoría de grafos para optimización territorial, y principios de teoría de decisión bajo incertidumbre, proporcionando un marco reproducible y escalable para operaciones de emergencia en regiones con infraestructura limitada.

3.11. Recomendaciones operativas y perspectivas

El sistema integrado de decisión desarrollado en este capítulo proporciona un marco matemáticamente fundamentado para la operación segura de drones en contextos de logística humanitaria. En esta sección se formulan recomendaciones operativas concretas derivadas de los resultados empíricos, se discuten las limitaciones del modelo actual y se proponen direcciones para investigación futura que permitan fortalecer la robustez y escalabilidad del sistema.

3.11.1. Recomendaciones operativas para implementación

Basado en los resultados de validación del modelo de pronóstico y la función de decisión binaria, se establecen las siguientes recomendaciones para la implementación operacional del sistema:

3.11.1.1. 1. Ventana temporal óptima para evaluación

El horizonte de pronóstico de $H = 60$ minutos demostrado en este trabajo proporciona un equilibrio adecuado entre precisión predictiva y utilidad operativa. Se recomienda:

- **Evaluación inicial:** Realizar la primera evaluación de viabilidad $\mathbb{I}_{\text{vuelo}}$ con 90 minutos de antelación al vuelo programado, permitiendo tiempo para activación de protocolos de contingencia.
- **Reevaluación periódica:** Actualizar el pronóstico cada $\Delta t = 10$ minutos durante la ventana de decisión, aprovechando la eficiencia computacional del modelo híbrido ($\mathcal{O}(N)$).
- **Validación pre-despegue:** Confirmar $\mathbb{I}_{\text{vuelo}} = 1$ inmediatamente antes del despegue, utilizando las observaciones más recientes disponibles.

3.11.1.2. 2. Umbrales de decisión conservadores

Los resultados del block bootstrap revelaron que el percentil 95 (p_{95}) proporciona una medida robusta de riesgo operacional. Se recomienda:

- **Política de tolerancia cero:** Mantener el umbral de precipitación en $R_{\text{máx}} = 0.1 \text{ mm} \cdot \text{h}^{-1}$, dado el riesgo catastrófico de fallo eléctrico.
- **Margen de seguridad para viento:** Operar con un límite efectivo de $V_{\text{efectivo}} = 8.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, inferior al límite técnico del dron ($10.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$), para incorporar margen de seguridad ante ráfagas no modeladas.
- **Monitoreo continuo de temperatura:** Implementar alertas tempranas cuando $T_{\text{máx}} > 40^\circ\text{C}$, aunque el límite técnico sea 45°C , para prevenir degradación acelerada de baterías Li-Po.

3.11.1.3. 3. Protocolos de contingencia escalonados

La integración con la red terrestre del Capítulo 3 requiere protocolos claros para cuando $\mathbb{I}_{\text{vuelo}} = 0$:

Estado Meteorológico	Acción Operativa	Tiempo de Respuesta
$\mathbb{I}_{\text{vuelo}} = 1$	Despacho inmediato de dron	15–20 min
$\mathbb{I}_{\text{vuelo}} = 0$ (temporal)	Reevaluación en $t + 30$ min	30–60 min
$\mathbb{I}_{\text{vuelo}} = 0$ (persistente)	Activación de ruta terrestre	60–120 min
$\mathbb{I}_{\text{vuelo}} = 0$ (crítico)	Suspensión de operaciones	> 120 min

Esta estructura escalonada permite mantener la flexibilidad operativa sin comprometer la seguridad, aprovechando la rapidez del transporte aéreo cuando las condiciones lo permiten y recurriendo a la red terrestre optimizada mediante PageRank como respaldo.

3.11.1.4. 4. Integración con sistemas de monitoreo existentes

Para maximizar la utilidad del sistema de decisión, se recomienda:

- **Interfaz de visualización:** Desarrollar un dashboard que muestre $\mathbb{I}_{\text{vuelo}}$, los valores p_{95} por segmento, y la ruta crítica identificada por PageRank en tiempo real.
- **Alertas automatizadas:** Configurar notificaciones cuando cualquier variable se aproxime al 80 % de su umbral crítico, permitiendo acción preventiva.
- **Registro histórico:** Almacenar todas las decisiones $\mathbb{I}_{\text{vuelo}}(t)$ y condiciones asociadas para auditoría posterior y recalibración del modelo.

3.11.2. Limitaciones del modelo actual

Es fundamental reconocer las limitaciones inherentes a la formulación matemática presentada, las cuales definen el ámbito de validez de las recomendaciones operativas:

3.11.2.1. 1. Dependencia de densidad de observaciones

El modelo de pronóstico advectivo requiere una densidad mínima de estaciones meteorológicas a lo largo del corredor de vuelo. En el caso de estudio (Aeropuerto hacia Protección Civil), se contó con cobertura adecuada. Sin embargo:

- **Regiones con cobertura limitada:** En zonas con espaciado entre estaciones > 10 km, la interpolación espacial puede introducir errores no cuantificados en la estimación de la velocidad de advección.
- **Recomendación:** Para implementación en otras regiones, realizar un análisis de sensibilidad de la densidad de observaciones antes del despliegue operacional.

3.11.2.2. 2. Suposición de advección unidimensional

La formulación del transporte atmosférico como un proceso unidimensional dominante es una simplificación necesaria para la tractabilidad computacional:

- **Fenómenos no capturados:** Convección local profunda, turbulencia de aire claro (CAT) y efectos orográficos complejos no son modelados explícitamente.
- **Impacto:** En condiciones de inestabilidad atmosférica severa, el modelo puede subestimar la variabilidad espacial real.
- **Mitigación:** Incorporar un factor de seguridad adicional ($\kappa = 1.2$) en los umbrales de decisión durante temporadas de alta inestabilidad (mayo–octubre en Chiapas).

3.11.2.3. 3. Estática de los umbrales técnicos

Los umbrales operacionales ($V_{\text{máx}}$, $T_{\text{máx}}$, $H_{\text{máx}}$, $R_{\text{máx}}$) se establecieron como valores fijos basados en especificaciones del dron:

- **Limitación:** No se considera la degradación progresiva de componentes (baterías, motores) que puede reducir los límites efectivos con el tiempo.
- **Recomendación:** Implementar un programa de recalibración trimestral de umbrales basado en historial de mantenimiento y desempeño operacional.

3.11.2.4. 4. Independencia condicional entre variables

El modelo asume que las variables meteorológicas son condicionalmente independientes dada la velocidad de advección:

$$\mathbb{P}(V, T, H, R \mid v) \approx \mathbb{P}(V \mid v) \cdot \mathbb{P}(T \mid v) \cdot \mathbb{P}(H \mid v) \cdot \mathbb{P}(R \mid v).$$

- **Realidad física:** Existe correlación entre variables (ej. temperatura y humedad a través de la curva de saturación).
- **Impacto:** Los intervalos de confianza pueden ser ligeramente conservadores o anticonservadores según la estructura de correlación no modelada.
- **Dirección futura:** Incorporar una matriz de covarianza multivariada en el procedimiento de block bootstrap.

3.11.3. Perspectivas para investigación futura

El marco desarrollado en esta tesis abre múltiples direcciones de investigación en la intersección de matemáticas aplicadas, meteorología y logística humanitaria:

3.11.3.1. 1. Optimización multiobjetivo dinámica

Extender la función de decisión binaria $\mathbb{I}_{\text{vuelo}}$ a un marco de optimización Pareto-óptimo que considere explícitamente trade-offs entre múltiples objetivos:

$$\min_{\mathbf{x}} \{T_{\text{total}}(\mathbf{x}), C_{\text{log}}(\mathbf{x}), \mathcal{R}(\mathbf{x})\},$$

sujeto a:

$$\mathbb{I}_{\text{vuelo}}(\mathbf{x}) = 1, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{X}_{\text{factible}},$$

donde $\mathcal{R}(\mathbf{x})$ representa una medida de riesgo operacional. Esto permitiría decisiones adaptativas que balanceen eficiencia, costo y seguridad según el nivel de urgencia humanitaria.

3.11.3.2. 2. Aprendizaje automático híbrido

Integrar modelos de *deep learning* (LSTM, Transformers) con el modelo advectivo físico para capturar patrones no lineales no modelados explícitamente:

$$\hat{y}_i(t+H) = w_{\text{físico}} \cdot \hat{y}_i^{\text{advectivo}}(t+H) + w_{\text{ML}} \cdot \hat{y}_i^{\text{LSTM}}(t+H),$$

con $w_{\text{físico}} + w_{\text{ML}} = 1$. Los pesos podrían aprenderse mediante validación cruzada temporal, permitiendo que el sistema mejore su desempeño con experiencia operacional acumulada.

3.11.3.3. 3. Redes complejas adaptativas

Modelar la red terrestre del Capítulo 3 como un sistema complejo adaptativo donde los pesos de las aristas w_{ij} evolucionan dinámicamente según:

- Reportes de daños en infraestructura vial post-desastre.
- Condiciones meteorológicas locales que afectan la transitabilidad.
- Niveles de demanda humanitaria en cada municipio.

Esto requeriría algoritmos de PageRank incremental para actualización eficiente sin recálculo completa del vector estacionario π .

3.11.3.4. 4. Coordinación de enjambres de drones

Generalizar el modelo de decisión para coordinar flotas de M drones múltiples, transformando el problema de decisión binaria en un problema de asignación de recursos distribuidos:

$$\max_{\mathbf{x} \in \{0,1\}^{M \times N}} \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^N \pi_i \cdot x_{mi},$$

sujeto a:

$$\sum_{m=1}^M x_{mi} \leq 1, \quad \mathbb{I}_{\text{vuelo}}^{(m)} = 1, \quad \text{restricciones de colisión.}$$

Esta extensión es crítica para escalar la operación a nivel estatal, cubriendo múltiples corredores simultáneamente.

3.11.3.5. 5. Asimilación de datos satelitales

Incorporar observaciones de satélites meteorológicos (GOES-16, Himawari) para mejorar la estimación de la velocidad de advección en regiones con cobertura terrestre limitada:

- **Ventaja:** Cobertura espacial completa sin dependencia de estaciones terrestres.
- **Desafío:** Resolución temporal inferior (5–10 min vs. 1 min en estaciones terrestres).
- **Enfoque híbrido:** Fusionar datos satelitales y terrestres mediante filtrado de Kalman para estimación óptima de v .

3.11.3.6. 6. Extensión geográfica a otras regiones

La metodología es directamente aplicable a otras regiones con desafíos similares de topografía y clima:

- **Requisitos mínimos:** Serie temporal de 7+ días, densidad de observaciones ≥ 1 estación cada 5 km, ruta definida con $N \geq 10$ segmentos.
- **Adaptación local:** Recalibrar umbrales técnicos según especificaciones del dron y condiciones climáticas regionales.
- **Validación:** Realizar pruebas de concepto en al menos 3 corredores adicionales antes de despliegue a escala estatal.

3.11.4. Reflexión final sobre el aporte metodológico

Esta tesis ha demostrado que la rigurosidad matemática en la modelación de fenómenos atmosféricos y la optimización de redes de transporte puede traducirse directamente en mejoras operativas tangibles para la logística humanitaria. La combinación de:

1. **Teoría de grafos** (PageRank para priorización territorial),
2. **Procesos estocásticos** (block bootstrap para incertidumbre),
3. **Análisis espectral** (f - k para velocidad de advección),
4. **Teoría de decisión** (función binaria robusta bajo incertidumbre),

proporciona un lenguaje común para abordar la incertidumbre inherente a los sistemas de emergencia.

El sistema integrado propuesto no solo ofrece una herramienta técnica para la operación de drones en Chiapas, sino que establece un precedente metodológico replicable en otras regiones con desafíos similares de infraestructura y clima. La estructura modular del sistema permite que cada componente (pronóstico, decisión, optimización terrestre) sea mejorado independientemente sin afectar la arquitectura global.

En última instancia, el valor de este trabajo reside en su potencial para **salvar vidas mediante la reducción de tiempos de respuesta y el incremento de la seguridad operacional** en misiones de ayuda humanitaria. La matemática aplicada, cuando se fundamenta en comprensión física profunda y se valida empíricamente, se convierte en un instrumento poderoso para el bien social, cumpliendo así con el propósito esencial de la investigación científica en contextos de desarrollo.

Referencias

- Brin, Sergey, y Lawrence Page. 1998. «The Anatomy of a Large-Scale Hypertextual Web Search Engine». *Computer Networks and ISDN Systems* 30 (1–7): 107-17. [https://doi.org/10.1016/S0169-7552\(98\)00110-X](https://doi.org/10.1016/S0169-7552(98)00110-X).
- Hayashi, Yoshikazu. 1973. «A method of analyzing transient waves by space-time cross spectra». *Journal of Applied Meteorology* 12 (3): 404-8. [https://doi.org/10.1175/1520-0450\(1973\)012%3C0404:AMOATW%3E2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0450(1973)012%3C0404:AMOATW%3E2.0.CO;2).
- NASA Earthdata. 2024. «Shuttle Radar Topography Mission (SRTM) Data». <https://earthdata.nasa.gov/>.
- National Geospatial-Intelligence Agency. 2014. «Department of Defense World Geodetic System 1984: Its Definition and Relationships with Local Geodetic Systems». NGA.STND.0036_1.0.0_WGS84. National Geospatial-Intelligence Agency (NGA). <https://earth-info.nga.mil/GandG/wgs84/index.html>.
- OpenStreetMap Contributors. 2024. «Nominatim API». <https://nominatim.openstreetmap.org/>.
- Project OSRM. 2024. «Open Source Routing Machine (OSRM)». <https://project-osrm.org/>.
- Snow, Alan D. et al. 2023. «pyproj4/pyproj: 3.6.0». Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.3783026>.
- Snyder, John P. 1987. *Map Projections: A Working Manual*. USGS Professional Paper 1395. Washington, DC: United States Geological Survey. <https://doi.org/10.3133/pp1395>.
- Vincenty, Thaddeus. 1975. «Direct and Inverse Solutions of Geodesics on the Ellipsoid with Application of Nested Equations». *Survey Review* 23 (176): 88-93. <https://doi.org/10.1179/sre.1975.23.176.88>.

A. Apéndice

A.1. Lista de municipios del estado de Chiapas

El presente estudio consideró los siguientes 124 municipios del estado de Chiapas:

- | | | |
|--------------------------------|---------------------------|---------------------------|
| 1. Acacoyagua | 19. Chalchihuitán | 39. Frontera Comalapa |
| 2. Acala | 20. Chamula | 40. Frontera Hidalgo |
| 3. Acapetahua | 21. Chanal | 41. Honduras de la Sierra |
| 4. Aldama | 22. Chapultenango | 42. Huehuetán |
| 5. Altamirano | 23. Chenalhó | 43. Huitiupán |
| 6. Amatán | 24. Chiapa de Corzo | 44. Huixtán |
| 7. Amatenango de la Frontera | 25. Chiapilla | 45. Huixtla |
| 8. Amatenango del Valle | 26. Chicoasén | 46. Ixhuatán |
| 9. Ángel Albino Corzo | 27. Chicomuselo | 47. Ixtacomitán |
| 10. Arriaga | 28. Chilón | 48. Ixtapa |
| 11. Bejucal de Ocampo | 29. Cintalapa de Figueroa | 49. Ixtapangajoya |
| 12. Bella Vista | 30. Coapilla | 50. Jiquipilas |
| 13. Benemérito de las Américas | 31. Comitán de Domínguez | 51. Jitotol |
| 14. Berriozábal | 32. Copainalá | 52. Juárez |
| 15. Bochil | 33. El Bosque | 53. La Concordia |
| 16. Cacahoatán | 34. El Parral | 54. La Grandeza |
| 17. Capitán Luis Ángel Vidal | 35. El Porvenir | 55. La Independencia |
| 18. Catazajá | 36. Emiliano Zapata | 56. La Libertad |
| | 37. Escuintla | 57. La Trinitaria |
| | 38. Francisco León | 58. Larráinzar |

59. Las Margaritas	81. Pichucalco	102. Suchiate
60. Las Rosas	82. Pijijiapan	103. Sunuapa
61. Mapastepec	83. Pueblo Nuevo Solis- tahuacán	104. Tapachula
62. Maravilla Tenejapa	84. Rayón	105. Tapalapa
63. Marqués de Comi- llas	85. Reforma	106. Tapilula
64. Mazapa de Madero	86. Rincón Chamula San Pedro	107. Tecpatán
65. Mazatán	87. Sabanilla	108. Tenejapa
66. Metapa	88. Salto de Agua	109. Teopisca
67. Mezcalapa	89. San Andrés Duraz- nal	110. Tila
68. Mitontic	90. San Cristóbal de las Casas	111. Tonalá
69. Montecristo de Gue- rrero	91. San Fernando	112. Totolapa
70. Motozintla	92. San Juan Cancuc	113. Tumbalá
71. Nicolás Ruíz	93. San Lucas	114. Tuxtla Chico
72. Ocosingo	94. Santiago el Pinar	115. Tuxtla Gutiérrez
73. Ocotepec	95. Siltepec	116. Tuzantán
74. Ocozocoautla de Es- pinosa	96. Simojovel	117. Tzimol
75. Ostuacán	97. Sitalá	118. Unión Juárez
76. Osumacinta	98. Socoltenango	119. Venustiano Carran- za
77. Oxchuc	99. Solosuchiapa	120. Villa Comaltitlán
78. Palenque	100. Soyaló	121. Villa Corzo
79. Pantelhó	101. Suchiapa	122. Villaflores
80. Pantepec		123. Yajalón
		124. Zinacantán

B. Apéndice

B.1. Implementación computacional del block bootstrap

La implementación del block bootstrap sigue el siguiente algoritmo optimizado para series con muestreo $\Delta t = 10$ minutos:

```
#| echo: true
#| eval: false
def block_bootstrap_forecasts(df_segments_smooth, seg_positions,
                             B=200, block_minutes=60,
                             sampling_min=10, v_advection=None):
    """
    Genera intervalos de confianza mediante block bootstrap temporal.

    Parámetros:
    -----
    df_segments_smooth : DataFrame
        Serie temporal suavizada por segmentos
        (filas=tiempo, columnas=segmentos)
    seg_positions : array
        Posiciones centroidales de los segmentos espaciales (metros)
    B : int
        Número de réplicas bootstrap (default: 200)
    block_minutes : int
        Longitud del bloque en minutos (default: 60)
    sampling_min : int
        Intervalo de muestreo en minutos (default: 10)
    v_advection : float
        Velocidad de advección fija (None para reestimar en cada réplica)

    Retorna:
    -----
    boot_forecasts : ndarray (B x N)
        Matriz de pronósticos bootstrap para cada réplica y segmento
    """
    n = df_segments_smooth.shape[0] # número de observaciones temporales
```

```

block_size = max(1, int(block_minutes / sampling_min))
n_blocks = int(np.ceil(n / block_size))
boot_forecasts = np.zeros((B, len(seg_positions)))
rng = np.random.default_rng(12345) # semilla para reproducibilidad

for b in range(B):
    # Remuestreo de bloques con reemplazo
    idx_blocks = rng.integers(0, n_blocks, size=n_blocks)
    indices = []
    for bl in idx_blocks:
        start = bl * block_size
        end = min(n, start + block_size)
        indices.extend(list(range(start, end)))
    idxs = np.array(indices)[:n] # ajustar a longitud exacta

    # Construir serie bootstrap
    M_boot = df_segments_smooth.iloc[idxs, :].reset_index(drop=True)

    # Determinar velocidad de advección para esta réplica
    if v_advection is None:
        # Reestimar velocidad (para viento)
        v_boot = estimate_advection_velocity(M_boot, seg_positions)
    else:
        # Usar velocidad fija para temperatura, humedad, precipitación
        v_boot = v_advection

    # Generar pronóstico para cada segmento
    last_vals_boot = M_boot.iloc[-1, :].values
    for i in range(len(seg_positions)):
        boot_forecasts[b, i] = advective_forecast(
            segment_idx=i,
            last_value=last_vals_boot[i],
            positions=seg_positions,
            data_matrix=M_boot,
            velocity=v_boot,
            horizon_minutes=60
        )

return boot_forecasts

```